

Diagnostic optimal d'erreurs pour architecture de qubits à mesure faible et continue

par

Gabrielle Denhez

mémoire présenté au département de physique
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 16 février 2011



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-79815-7
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-79815-7

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

Le 24 février 2011

*le jury a accepté le mémoire de Madame Gabrielle Denhez
dans sa version finale.*

Membres du jury

Professeur David Poulin
Directeur de recherche
Département de physique

Professeur Alexandre Blais
Codirecteur de recherche
Département de physique

Professeur Christian Lupien
Membre
Département de physique

Professeur René Côté
Président rapporteur
Département de physique

À ceux que j'aime.

Sommaire

L'un des principaux obstacles pour construire un ordinateur quantique est la décohérence, laquelle limite grandement le temps alloué pour un calcul ainsi que la taille du système. Pour combattre la décohérence dans un système quantique, des protocoles de correction d'erreurs ont été proposés et semblent apporter une bonne solution à ce problème. Ces protocoles consistent à confiner l'information que contiennent les qubits dans un sous-espace nommé espace code. Après un certain temps d'évolution, on pose un diagnostic sur l'erreur qui s'est produite sur le système en effectuant des mesures indiquant s'il est toujours dans l'espace code où s'il a évolué vers un autre sous-espace.

Pour que de tels protocoles soient efficaces, les mesures effectuées doivent en principe être rapides et projectives. Cependant, pour plusieurs architectures de qubits existantes, les mesures sont faibles et se font de façon continues. De plus, elles peuvent introduire elles-mêmes des erreurs dans le système. Ces caractéristiques de mesure rendent difficile le diagnostic de l'erreur tel qu'il est effectué traditionnellement. Aussi comme les mesures peuvent introduire des erreurs, il n'est pas certain que les protocoles de diagnostic d'erreur traditionnels soient utiles.

Dans ce travail, on étudie l'utilité d'une mesure faible et continue dans un processus de correction d'erreurs. Cette étude s'est réalisée en deux volets. D'abord, on présente un protocole de correction d'erreur adapté aux architectures de qubits dont la mesure est faible et se fait de façon continue. On montre que ce protocole permet d'évaluer sous quelles conditions une mesure présentant ces caractéristiques peut aider à corriger des erreurs. Ensuite, on teste ce protocole de correction dans le cas particulier des qubits supraconducteurs. On établit sous quelles conditions la mesure sur ces qubits peut aider à diagnostiquer les erreurs et on étudie l'effet de différents paramètres expérimentaux dans ce contexte.

Mots-clés : informatique quantique, correction d'erreurs quantique, qubits supraconducteurs, mesures faibles et continues, programmation semi-définie

Remerciements

Avant tout, j'aimerais remercier David Poulin et Alexandre Blais pour leur supervision dans ce projet. Grâce à eux, j'ai appris des choses passionnantes et vécu de belles expériences. J'ai particulièrement apprécié leurs efforts à rendre compréhensible des concepts difficiles.

Merci à Kevin Lalumière, Maxime Boissonneault et Steve Allen pour l'aide informatique. Ils ont programmé certaines fonctions pour que je puisse effectuer des simulations et m'ont aidé à résoudre les problèmes dans mon code. Je les remercie en particulier pour leur patience.

Merci aussi à mes collègues de l'ÉPIQ (Équipe de recherche en Physique de l'Information Quantique). Ils m'ont bien accueilli et m'ont aidé dans mon projet. Nous avons eu de bons échanges lors des «journal club», et bien du plaisir lors des «barbecue quantique» ou vins et fromages.

Merci à ma famille et mes amis qui m'ont supporté lors des périodes plus difficiles. Je remercie également mon copain, Christian Ouellet, qui s'est intéressé à ce que je faisais et m'a, entre autres, aidé à pratiquer les présentations que j'ai donnés au cours de ma maîtrise.

Finalement, je voudrais remercier particulièrement mon ami Daniel Veilleux, ou Danne pour les intimes. Malgré un cancer, Danne poursuivait ses études et trouvait le temps de m'aider à comprendre les notions difficiles des cours. Il m'a ainsi aidé à passer à travers le bac en physique et la maîtrise. C'était également un formidable ami. Nous avons fait ensemble des duos de musique, des sorties de magasinages... même un saut en parachute. Malgré ce qu'il vivait, il me remontait le moral quand j'étais déprimée. Il nous a malheureusement quitté le 24 juin 2010, mais il restera toujours un modèle pour moi.

Table des matières

Sommaire	iii
Table des matières	v
Liste des figures	vii
Introduction	1
1 Concepts de base	5
1.1 Les codes stabilisateurs	5
1.1.1 Évolution d'un système quantique en présence d'un environnement	6
1.1.2 Formalisme des codes stabilisateurs	9
1.1.3 Le code à trois qubits	14
1.1.4 Le code à quatre qubits	15
1.2 Les qubits supraconducteurs	17
1.2.1 Les composants d'un qubit supraconducteur	18
1.2.2 Électrodynamique en circuit	21
1.2.3 Mesure homodyne	25
1.2.4 Mesure de parité	28
1.3 Obstacles pour la correction d'erreur	30
1.4 Énoncé de l'objectif et des résultats	31
2 Méthodologie	33
2.1 Utilisation d'un simulateur	34
2.2 Incorporer les mesures	36
2.3 Correction optimale	38
2.4 Évaluation de la méthode	41

<i>Table des matières</i>	vi
2.4.1 Tomographie de Bayes	42
2.4.2 Tomographie de l'état corrigé	44
3 Application de la méthode et résultats	48
3.1 Méthodes numériques	48
3.1.1 Équation maîtresse pour le code à trois qubits	49
3.1.2 Équation maîtresse pour le code à quatre qubits	51
3.2 Résultats	53
3.2.1 Paramètres utilisés	54
3.2.2 Le code à trois qubits	55
3.2.3 Le code à quatre qubits	58
Conclusion	64
Annexe A Les matrices densité	66
Annexe B Les superopérateurs	68
Annexe C Isomorphisme de Jamilkovski	69
Annexe D Équation maîtresse pour le code à trois qubits	71
Bibliographie	75

Liste des figures

1.1	La jonction de Josephson et sa représentation dans un circuit	19
1.2	Qubit de charge	20
1.3	Niveaux d'énergie d'un qubit de charge en fonction de la charge résiduelle n_g , pour différents ratios E_J/E_C	21
1.4	Atome dans une cavité résonante	22
1.5	Qubit supraconducteur couplé à un résonateur	22
1.6	Amplitude du signal en sortie d'un résonateur couplé à un qubit en fonction de la fréquence du signal d'entrée	24
1.7	Mesure homodyne d'un signal a	25
1.8	Circuit utilisé pour effectuer une mesure homodyne sur un qubit supraconducteur	26
1.9	Amplitude des états cohérents	27
1.10	Deux qubits couplés à un résonateur	28
1.11	État cohérent dans le résonateur si le qubit est dans l'état $ 00\rangle$ (α_{gg}), $ 11\rangle$ (α_{ee}), $ 01\rangle$ (α_{ge}) ou $ 10\rangle$ (α_{eg})	30
2.1	Probabilité d'une bonne correction en fonction du nombre de mesures prises dans un intervalle de temps donné, en utilisant le code à trois qubits	37
3.1	Montage possible pour réaliser le code à 3 qubits sur des qubits supraconducteurs	49
3.2	Graphique de la fidélité à l'état initial en fonction du temps, code à trois qubits	56
3.3	Graphique de la fidélité à l'état initial en fonction de l'efficacité des mesures, code à trois qubits	58

3.4	Graphique de la fidélité à l'état initial en fonction du temps, code à quatre qubits	59
3.5	Graphique de la fidélité à l'état initial en fonction de l'efficacité des mesures, code à quatre qubits	60
3.6	Graphique de la fidélité à l'état initial en fonction de l'amplitude de l'excitation électromagnétique, code à quatre qubits	61
3.7	Graphique de la fidélité à l'état initial en fonction du décalage de Stark, code à quatre qubits	62
3.8	Graphique de la fidélité à l'état initial en fonction du taux de relaxation de résonateurs, code à quatre qubits	63
3.9	Graphique de la fidélité à l'état initial en fonction du taux de relaxation de résonateurs, à un taux Purcell constant, code à quatre qubits	63

Introduction

Le début du XXe siècle fut marqué par l'apparition de l'une des plus grandes théories de la physique. La mécanique quantique permit de résoudre différents paradoxes tel que celui du rayonnement d'un corps noir et d'expliquer un grand nombre de phénomènes naturels [1]. Pourtant, elle introduit des concepts qui peuvent sembler étranges. Par exemple, le concept de superposition d'états permet d'imaginer un électron en plusieurs endroits en même temps. Un autre exemple frappant est le concept d'enchevêtrement qui permet des corrélations qui ne peuvent être expliquées par une théorie probabiliste classique. Ce concept permet, entre autres, la téléportation d'un état quantique.

En parallèle à la mécanique quantique s'est développé le calcul informatique. Les fondements théoriques d'une machine programmable ont été énoncés par Alan Turing en 1936, puis, peu de temps après, John Von Newman développa l'architecture utilisée pour construire un ordinateur. Depuis l'arrivée du transistor en 1947, la puissance de ces derniers augmente de manière exponentielle [2].

Vers la fin du XXe siècle, plusieurs chercheurs eurent l'idée de prendre avantage des étrangetés de la mécanique quantique pour augmenter la performance des ordinateurs. Constatant la difficulté de simuler un système quantique, Feynman suggéra l'utilisation d'un ordinateur de même nature pour accomplir cette tâche. En 1985, David Deutsch étudia la question et découvrit un algorithme quantique plus efficace que son analogue classique pour déterminer si une fonction $f\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ est constante. Suite à ces travaux, plusieurs trouvèrent d'autres exemples de problèmes qu'un ordinateur quantique résolvait en moins d'opérations [3]. L'intérêt porté aux ordinateurs quantiques s'accru lorsqu'en 1995, Shor développa un algorithme quantique permettant de factoriser rapidement de grands nombres [4]. Cet algorithme permettrait de déchiffrer un code RSA¹ en un temps qui croît de manière polynomiale avec la taille du système. Peu de temps après, Grover trouva un algorithme de recherche plus efficace que son analogue classique [2]. Le

¹Système de cryptage dont la sécurité repose sur la difficulté de factoriser des grands nombres [5]

développement de la cryptographie quantique et la réalisation de premières opérations logiques sur des systèmes pouvant potentiellement jouer le rôle de bits quantiques [6–8] contribuèrent également à l’essor de ce nouveau domaine de recherche. [9]

Si l’avenir de l’informatique quantique peut sembler prometteur, plusieurs défis doivent être surmontés pour construire un ordinateur quantique. L’un des principaux est la décohérence. Les bits quantiques, ou qubits, sont sensibles à leur environnement et peuvent interagir avec celui-ci, causant une évolution imprévue du système. Ces effets entraînent des erreurs dans un calcul, de sorte qu’on ne peut plus se fier aux résultats. On a rapidement réalisé l’ampleur de ce problème, certains travaux suggérant que le couplage avec l’environnement était un facteur limitant grandement le temps alloué pour effectuer un calcul et la tailles des systèmes considérés [10].

Dans le but de contrer les effets de l’environnement sur les qubits, une branche importante de recherche s’est développée : la correction d’erreur quantique. Un pas important dans cette direction a été la création des premiers protocoles permettant de corriger un ensemble d’erreurs pouvant se produire sur des qubits [11,12]. Cela a entraîné l’apparition d’une classe importante de codes correcteur : les codes stabilisateurs [13,14]. L’utilisation de techniques de corrections semble être une bonne solution au problème de la décohérence : il a été montré que, si le taux d’erreurs se situait sous un certain seuil critique, il est possible de simuler n’importe quelle opération idéale à l’aide de qubits sujets aux erreurs, le tout, à un coût qui croît de manière polynomiale avec la taille du problème et la précision désirée [15].

Bien que le formalisme des codes stabilisateurs ait été bien établi, il reste encore du travail à faire dans ce domaine. Il existe notamment un écart entre la théorie et ce qui se fait en pratique. En effet, une partie importante de plusieurs protocoles de correction consiste à effectuer des mesures sur les qubits afin d’obtenir une information partielle sur la nature de l’erreur qu’ils ont subit. En première analyse, on suppose que la mesure est parfaite et qu’elle est rapide, ce qui n’est pas vrai pour la plupart des architectures de qubits existantes. Dans le cas des qubits supraconducteurs par exemple, la mesure n’est pas d’une efficacité parfaite et est continue, c’est-à-dire qu’elle s’effectue sur une période de temps telle que le système évolue pendant celle-ci. De plus, elle introduit du bruit dans le système [16]. Dans un tel contexte, il n’est pas certain qu’elle puisse aider à corriger les erreurs.

Dans ce mémoire, on étudie l’utilité qu’une mesure faible, continue et bruyante peut avoir dans un protocole de correction d’erreur. Cela s’est réalisé en deux volets. D’abord,

un protocole de correction d'erreur optimale a été développé tenant compte des caractéristiques et imperfections de la mesure. On explique que ce protocole permet de déterminer si une mesure développée pour une architecture de qubit peut en principe aider à corriger des erreurs. Puis, la méthode a été testée numériquement sur des qubits supraconducteurs. À travers des simulations numériques, on a pu montrer que, sous un certain régime de paramètres, il est avantageux d'utiliser la mesure développée pour les qubits supraconducteurs afin de corriger les erreurs.

Au chapitre 1, différents concepts de base sont introduits. D'abord, les principes et formalismes des codes stabilisateurs sont expliqués. Des exemples de codes correcteurs qui seront utilisés par la suite, soit les codes à trois et à quatre qubits, sont étudiés plus en détail. Ensuite, une brève introduction sur les qubits supraconducteurs est donnée. Les mécanismes de la mesure qu'on veut utiliser pour corriger les erreurs sont alors abordés. Puis, on explique en quoi il est difficile d'implémenter un code stabilisateur sur une architecture de qubit telle que les qubits supraconducteurs. Finalement, on précise les objectifs et les résultats de ce travail.

Au chapitre 2, on explique en détail la méthode de diagnostique d'erreur qui tient compte de mesures imparfaites. Les grandes étapes de la méthode sont d'abord énoncées, mettant en évidence ce qui diffère des processus de diagnostique traditionnels. On remarque qu'elle requiert de caractériser les erreurs qui se sont produites sur le système via une simulation, procédure qui est expliquée plus en détail dans la section 2.1. Ensuite, on explique comment on incorpore une mesure faible et continue dans le processus de correction. Puis, on fait un retour sur la simulation et on explique comment, grâce à celle-ci, on peut déterminer la meilleure correction à appliquer au système. Cette correction optimale n'est peut-être pas réalisable en pratique. On termine donc le chapitre en proposant une méthode pour effectuer une tomographie de l'état corrigé moyen sans appliquer cette correction. La tomographie permet d'évaluer l'efficacité de tout ce processus de correction.

Au chapitre 3, on applique la méthode aux qubits supraconducteurs, dans le cas des codes à trois et à quatre qubits. Dans un premier temps, les détails des méthodes numériques pour simuler l'évolution de ces systèmes sont expliqués. On montre alors les différentes équations régissant leur évolution et on explique les différentes approximations faites dans le but d'effectuer les simulations. À partir des résultats des simulations, on calcule une fidélité optimale entre l'état corrigé et l'état initial, laquelle permet d'estimer numériquement la performance de la méthode de correction. On discute ensuite

des principaux résultats, lesquels permettent de déterminer sous quelles conditions une mesure sur des qubits supraconducteurs peut aider à diagnostiquer les erreurs.

Chapitre 1

Concepts de base

Dans ce chapitre, les concepts nécessaires pour comprendre le fonctionnement de la méthode de correction d'erreurs seront abordés. Le fonctionnement des codes stabilisateurs utilisés pour corriger des erreurs sera d'abord expliqué dans la section 1.1. On y montrera comment un système exposé à un environnement bruyant peut évoluer de manière incontrôlée, et comment on s'y prend pour inverser cet effet indésirable. Ensuite, dans la section 1.2, une architecture de qubit à mesure faible et continue sera présentée. On montrera de quoi sont composés les qubits supraconducteurs et comment on effectue une mesure sur ceux-ci. Dans la section 1.3, la difficulté d'appliquer un protocole de correction d'erreurs sur un système tel que les qubits supraconducteurs est mise en évidence. On termine finalement en énonçant les principaux objectifs et résultats de ce travail dans la section 1.4.

1.1 Les codes stabilisateurs

Les codes stabilisateurs permettent de détecter et corriger des erreurs sur les qubits. Dans cette section, le fonctionnement général des codes stabilisateurs est expliqué, puis, deux exemples de codes sont détaillés. Mais avant d'introduire les codes stabilisateurs, on explique comment un système évolue en présence d'un environnement.

1.1.1 Évolution d'un système quantique en présence d'un environnement

Un système quantique exposé à un environnement peut évoluer de manière incontrôlée. Ce phénomène, connu sous le nom de décohérence, entraîne des erreurs dans un calcul. Dans cette section, on montre comment un système évolue lorsqu'il interagit avec un environnement bruyant.

Pour expliquer le phénomène de la décohérence des qubits, on peut d'abord se convaincre qu'en raison de leur interaction avec un environnement, l'équation de Schrödinger est insuffisante pour décrire l'évolution des qubits seuls. Pour pouvoir utiliser l'équation de Schrödinger, l'environnement doit être inclus dans la description du système. On peut le voir en écrivant une forme générale de l'hamiltonien du système complet :

$$H_{\text{tot}} = H_q + H_e + H_i \quad (1.1)$$

où H_q est l'hamiltonien des qubits sans environnement, H_e est l'hamiltonien de l'environnement, H_i est le terme d'interaction entre les deux systèmes et H_{tot} est l'hamiltonien total. Le système complet, dans un état qu'on note $|\psi(t)\rangle_{\text{tot}}$, subit une évolution unitaire dictée par l'équation de Schrodinger :

$$|\psi(t)\rangle_{\text{tot}} = e^{-iH_{\text{tot}}t}|\psi(0)\rangle_{\text{tot}} = U_{\text{tot}}(t)|\psi(0)\rangle_{\text{tot}} \quad (1.2)$$

À travers le terme d'interaction dans l'hamiltonien, on comprend qu'il n'est plus possible d'utiliser l'équation de Schrödinger pour décrire l'évolution des qubits sans tenir compte de l'environnement. Pour s'en convaincre, on peut supposer que le système n'est initialement pas intriqué avec l'environnement, c'est-à-dire que $|\psi(0)\rangle_{\text{tot}} = |\psi(0)\rangle_q \otimes |\psi(0)\rangle_e$. Dans un tel cas, on voit que, en raison du terme d'interaction :

$$|\psi(t)\rangle_{\text{tot}} = U_{\text{tot}}|\psi(0)\rangle_{\text{tot}} \neq U_q|\psi(0)\rangle_q \otimes U_e|\psi(0)\rangle_e \quad (1.3)$$

En effet, on peut imaginer que l'interaction cause une perte d'énergie dans le système ou fait en sorte que celui-ci s'intrique avec l'environnement. L'inégalité (1.3) montre que les qubits ne suivent plus une évolution unitaire telle que dictée par l'équation de Schrödinger, mais subissent une évolution plus générale qu'on appelle un canal. Dans de telles conditions, il n'est plus possible d'écrire l'état des qubits seuls, sans environnement, comme un ket. On choisit donc la représentation des matrices densité. Sous cette

représentation, l'état des qubits s'écrit comme suit :

$$\rho(t)_q = \text{Tr}_e |\psi(t)\rangle_{\text{tot}} \langle \psi(t)|_{\text{tot}} = \sum_i \langle i|_e |\psi(t)\rangle_{\text{tot}} \langle \psi(t)|_{\text{tot}} |i\rangle_e \quad (1.4)$$

où Tr_e est la trace partielle de la matrice sur l'espace de l'environnement. Un état représenté par un ket est un état pur. La matrice densité d'un tel état peut s'écrire $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$; elle n'a qu'un seul vecteur propre associé à une valeur propre non-nulle, laquelle vaut 1. L'avantage de représenter les états par des matrices densité est qu'il devient possible de décrire des états mixtes. Les états mixtes sont des mélanges statistiques d'états purs. Les matrices densité de tels états ont plusieurs valeurs propres non-nulles dont la somme vaut 1. L'annexe A présente plus d'informations sur les matrices densité.

Il existe plusieurs moyens de représenter un canal. L'équation (1.4) mène à l'une des représentations possibles, soit la représentation de Kraus. Poursuivant l'exemple d'un système de qubits en interaction avec un environnement initialement dans l'état $|\psi(0)\rangle_{\text{tot}} = |\psi(0)\rangle_q \otimes |\psi(0)\rangle_e$, on a :

$$\rho(t)_q = \text{Tr}_e |\psi(t)\rangle_{\text{tot}} \langle \psi(t)|_{\text{tot}} \quad (1.5)$$

$$= \text{Tr}_e (U_{\text{tot}} |\psi(0)\rangle_{\text{tot}} \langle \psi(0)|_{\text{tot}} U_{\text{tot}}^\dagger) \quad (1.6)$$

$$= \sum_i \langle i|_e U_{\text{tot}} |\psi(0)\rangle_e \langle \psi(0)|_q \langle \psi(0)|_q \langle \psi(0)|_e U_{\text{tot}}^\dagger |i\rangle_e \quad (1.7)$$

$$= \sum_i E_i \rho(0)_q E_i^\dagger \quad (1.8)$$

où les opérateurs $E_i = \langle i|_e U_{\text{tot}} |\psi(0)\rangle_e$ sont les opérateurs de Kraus. Ces opérateurs n'agissent que sur les qubits. Une autre représentation possible d'un canal est celle des superopérateurs présentée à l'annexe B.

L'approximation de Markov stipule que l'état du système à un temps futur ne dépend que de celui au temps présent, et non de son évolution antérieure. Elle est valide sous différentes conditions [17, 18]. Sous l'approximation de Markov, il est possible d'écrire l'équation (1.8) sous une forme différentielle. Cela se fait à l'aide d'un lindbladien \mathcal{L} [19] :

$$\dot{\rho}_q = \mathcal{L}\rho_q = -i[H_q, \rho_q] + \sum_\alpha D[a_\alpha]\rho_q \quad (1.9)$$

où les a_α sont des opérateurs quelconques. L'équation (1.9) est aussi connue sous le nom

d'équation maîtresse. Le lindbladien \mathcal{L} est un superopérateur : un opérateur qui agit sur une matrice densité et non un ket. Son premier terme représente une évolution unitaire par un hamiltonien telle que dictée par l'équation de Schrodinger. Les autres termes sont les dissipateurs, lesquels ont la forme suivante : $D[a_\alpha]\rho_q = a_\alpha\rho_q a_\alpha^\dagger - \frac{1}{2}(a_\alpha^\dagger a_\alpha \rho_q + \rho_q a_\alpha^\dagger a_\alpha)$. Ces termes permettent de tenir compte d'évolutions non-unitaires, mais préservent également la trace et la positivité d'une matrice densité.

L'équation de Lindblad est une généralisation de l'équation de Schrödinger. L'équation de Schrödinger ne permet que de caractériser l'évolution d'un système fermé. Elle prédit qu'un tel système subit un évolution unitaire U , on peut inverser cette évolution en appliquant une opération U^\dagger au système. L'équation de Lindblad peut également décrire l'évolution d'un système en interaction avec un environnement bruyant. L'évolution d'un tel système n'est pas nécessairement unitaire : le système peut passer d'un état pur à un état mixte. Il n'est pas possible d'inverser une telle dynamique.

L'équation de Lindblad est utilisée pour modéliser plusieurs effets. Par exemple, on peut modéliser la relaxation d'un qubit ou tout autre système à deux niveaux comme suit :

$$\dot{\rho} = \gamma_1 D[\sigma_-]\rho \quad (1.10)$$

où :

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

et où γ_1 est le taux moyen de perte d'énergie dans le système. Un autre effet important est le déphasage. L'effet du déphasage est de rendre aléatoire la phase φ d'un état $|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)$. L'état devient alors un mélange statistique des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Le déphasage est modélisé comme suit :

$$\dot{\rho} = \gamma_\varphi D[\sigma_z]\rho \quad (1.12)$$

où :

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

et où γ_φ est le taux de déphasage.

1.1.2 Formalisme des codes stabilisateurs

Pour étudier le fonctionnement des codes stabilisateurs, on peut exprimer le problème de la décohérence de la façon suivante : des qubits initialement dans un état pur $|\psi\rangle$ évoluent, en raison du bruit, vers un état $|\psi'\rangle = E|\psi\rangle$. En effet, on peut interpréter l'état (1.8) comme un mélange statistique des $E_i|\psi\rangle$. Cependant, on ne connaît pas la nature de l'erreur E qui s'est produite sur le système. Le rôle d'un code stabilisateur est de diagnostiquer l'erreur et de la corriger, pour ainsi retrouver l'état $|\psi\rangle$.

On peut supposer, dans un premier temps, que les erreurs possibles appartiennent toutes au groupe de Pauli. Un opérateur fait partie du groupe de Pauli lorsqu'il peut être écrit comme un produit tensoriel des matrices de Pauli et de l'identité, soit :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Par exemple, l'opérateur $\sigma_x \otimes \sigma_z \otimes I$ fait partie du groupe de Pauli alors que l'opérateur $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z)$ n'en fait pas partie. Chaque matrice de Pauli présentée en (1.14) représente une opération de base sur un système à deux niveaux comme un qubit. Le produit tensoriel de n de ces opérateurs est une opération sur n qubits. Les opérateurs de Pauli sur n qubits possèdent deux valeurs propres, 1 et -1 , dégénérées $n/2$ fois, exception faite de l'identité qui n'a qu'une valeur propre dégénérée n fois. Les opérateurs de Pauli ont aussi la propriété d'être leur propre inverse et de commuter ou anti-commuter entre eux. De plus, ils forment une base pour les opérateurs agissant sur un ensemble de qubits. En effet, une erreur E quelconque sur un ensemble de qubit peut être écrite comme suit :

$$E = \sum_i \alpha_i P_i \quad (1.15)$$

où P_i est un opérateur de Pauli et α_i est un nombre complexe. On verra plus loin que cette propriété permet de traiter le cas d'une erreur quelconque de façon similaire au cas des erreurs de Pauli. Le fait d'utiliser des opérateurs de Pauli suppose que le système physique jouant le rôle de qubit n'a que deux niveaux, supposition qui est généralement faite lorsqu'on étudie le fonctionnement d'un code stabilisateur.

L'astuce d'un code stabilisateur est d'utiliser plus de qubits qu'il n'en est nécessaire pour encoder de l'information. Autrement dit, pour représenter un état à k qubits, on utilise n qubits, où $n > k$. Dans un système de k qubits, on compte 2^k états de base. Pour encoder l'information que contiennent k qubits dans n qubits, on sélectionne 2^k

états orthogonaux parmi les 2^n disponibles. Ces 2^k états se nomment les mots codes, un état quantique est dans l'espace code s'il est dans une superposition ou un mélange statistique des mots codes. On encode l'information que contiennent k qubits dans cet espace code. On peut représenter cette étape d'encodage comme suit :

$$|\psi\rangle = U_c |\psi_k\rangle \quad (1.16)$$

où $|\psi_k\rangle$ est un état à k qubits à encoder et $|\psi\rangle$ est un état à n qubits dans l'espace code. La matrice U_c est une matrice rectangulaire de taille $2^n \times 2^k$, elle associe un mot code à chaque état à k qubits.

La raison pour laquelle on utilise plus de qubits que nécessaire est que, si le système ne se trouve plus dans l'espace code après exposition au bruit, on devine qu'il y a eu une erreur. En regardant vers quel autre sous-espace l'état a évolué, on peut tenter de déterminer quelle est l'erreur la plus probable et corriger en conséquence. Cependant, il faut faire attention lorsqu'on décide d'effectuer des mesures pour savoir si les qubits sont toujours dans l'espace code. En effet, en mesurant l'état du système, on risque de détruire une superposition des mots codes, ce qui n'est pas souhaitable. On peut éviter ce problème en respectant la procédure suivante.

D'abord, le processus de sélection des mots codes se fait grâce à des opérateurs appartenant au groupe de Pauli qu'on nomme les stabilisateurs. Ces stabilisateurs forment un groupe et commutent entre eux ; il est donc possible de trouver un ensemble de vecteurs propres commun à chacun d'eux. Un état quantique est un mot code s'il est un état propre de tous les stabilisateurs avec la valeur propre $+1$. En d'autres mots, soit $\{S_i\}$ l'ensemble des générateurs du groupe stabilisateur, un état $|\psi\rangle$ est dans l'espace code si, pour tout i , on a :

$$S_i |\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (1.17)$$

Les éléments du groupe stabilisateur peuvent être écrits comme le produit de plusieurs générateurs de ce groupe. Ainsi, si la relation (1.17) est respectée pour tous les générateurs, elle est aussi respectée pour tous les stabilisateurs. Chaque générateur possède deux valeurs propres dégénérées $n/2$ fois, soit 1 et -1 , et peuvent être compris comme une contrainte qui divise par deux le nombre de candidats à être un mot code. Donc, si on veut encoder k qubits, on doit avoir $m = n - k$ générateurs indépendants. Pour m générateurs, on compte 2^m éléments du groupe stabilisateur.

Après avoir laissé le système évoluer, on se sert des générateurs du groupe stabilisateur pour tenter d'identifier l'erreur qui s'est produite sur ce dernier. Ce processus d'identification consiste à mesurer tous les générateurs sur le système. On peut ainsi vérifier, à l'aide de la relation (1.17), si le système est toujours dans l'espace code ou non. Comme ces mesures ne permettent pas de distinguer les différents mots codes, on évite de détruire les superpositions d'états. Lorsque le système n'est plus dans l'espace code, ces mesures permettent de déterminer dans quel autre sous-espace le système se trouve, chaque sous-espace étant généré par les états propres des générateurs auxquels on associe un même ensemble de valeurs propres.

L'ensemble des résultats des mesures des générateurs du groupe stabilisateur se nomme le syndrome. Le syndrome donne un indice quant à la nature de l'erreur E qui s'est produite sur le système. Comme mentionné plus haut, une erreur de Pauli a la propriété de commuter ou d'anti-commuter avec un stabilisateur. Si l'erreur E commute avec un stabilisateur, une mesure de ce stabilisateur donnera 1, sinon, le résultat sera -1 . Mathématiquement, on le montre comme suit :

$$S|\psi'\rangle = S(E|\psi\rangle) = SE|\psi\rangle = \pm ES|\psi\rangle = \pm(E|\psi\rangle) = \pm|\psi'\rangle \quad (1.18)$$

Pour n qubits, il y a en tout 4^n erreurs de Pauli possibles. On peut vérifier que la moitié de ces erreurs commute avec un générateur S donné, et que l'autre moitié anti-commute avec ce générateur. En mesurant les m générateurs du groupe stabilisateur, on divise donc par 2^m le nombre d'erreurs possibles.

Si le produit de deux erreurs de Pauli E et E' donne un élément du groupe stabilisateur S , on dit qu'elles sont dégénérées. De telles erreurs ont le même effet sur un mot code. En effet :

$$|\psi\rangle = S|\psi\rangle \quad (1.19)$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = EE'|\psi\rangle \quad (1.20)$$

$$\Rightarrow E'|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (1.21)$$

où $|\psi\rangle$ est l'état initial du système dans l'espace code. L'équation (1.19) est respectée pour tous stabilisateurs S et mots codes $|\psi\rangle$. On justifie l'équation (1.21) par le fait qu'une matrice de Pauli est son propre inverse. Comme les erreurs dégénérées ont le même effet sur un mot code, le même syndrome leur est associé, mais il n'est pas nécessaire de les

distinguer pour corriger l'erreur. Chaque erreur est dégénérée 2^m fois, où m est le nombre de stabilisateurs.

Un autre type d'erreur est l'opérateur logique. Une erreur E est une opération logique lorsqu'elle commute avec tous les stabilisateurs, mais n'est pas elle-même un stabilisateur. À une telle erreur est associée le même syndrome que si rien du tout ne s'était produit, autrement dit, une mesure de tous les stabilisateurs donne 1. Ce genre d'erreur est nommée ainsi parce qu'elle représente une opération dans l'espace code : l'état final $|\psi'\rangle$ n'est plus le même qu'initialement, mais il reste dans l'espace code. On compte 4^k opérations logiques, où k est le nombre de mots codes. On ne peut pas détecter de telles erreurs. Si on n'utilisait pas plus de qubits que nécessaire pour encoder une information, toutes les erreurs seraient des erreurs logiques.

Pour corriger l'erreur qui a affecté le système, on ramène le système dans l'espace code. Pour ce faire, on applique un opérateur de Pauli E' pour lequel on associe le syndrome qui a été préalablement mesuré. Autrement dit, l'opérateur de correction E' choisi doit commuter et anti-commuter avec les mêmes stabilisateurs. Le choix de E' n'est pas unique. La correction est adéquate lorsque E' est dégénéré avec l'erreur de Pauli E qui s'est produite sur le système. En effet, on a :

$$E'|\psi'\rangle = E'(E|\psi\rangle) = S|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (1.22)$$

où S est un élément du groupe stabilisateur. Lorsque l'opérateur de Pauli E' utilisé pour corriger le système n'est pas dégénéré avec l'erreur qui s'est produite sur ce dernier, la correction entraîne une erreur logique. En effet, dans un tel cas, le produit de l'erreur E et de l'opérateur E' commute avec tous les stabilisateurs, mais n'est pas un élément de ce groupe.

Pour augmenter les chances de bien corriger l'erreur, on choisit généralement d'appliquer l'erreur de Pauli la plus probable compte tenu du syndrome mesuré. Pour déterminer l'erreur la plus probable, on utilise un modèle physique permettant d'associer une probabilité pour chaque erreur. On suppose généralement que le bruit est faible, c'est-à-dire que la probabilité qu'une matrice de Pauli s'applique sur un qubit en particulier est faible. On suppose aussi que le bruit est indépendant, c'est-à-dire qu'une erreur qui se produit sur un qubit n'affecte pas la probabilité qu'une erreur se produise sur d'autres qubits. L'un des modèles de bruit les plus utilisés est le canal dépolarisant. Dans le canal dépolarisant, la probabilité qu'une matrice de Pauli donnée s'applique sur un qubit est $p/3$ (le facteur $1/3$ vient du fait qu'il y a trois matrices de Pauli) et la probabilité que l'identité

se produise est $1 - p$. La probabilité d'une erreur E donnée dans le canal dépolarisant est donc :

$$P(E) = (1 - p)^{n-w} \left(\frac{p}{3}\right)^w \quad (1.23)$$

où n est le nombre de qubits et w est le poids de l'erreur de Pauli, soit, le nombre de matrices qui diffèrent de l'identité dans l'erreur. Lorsque le bruit est faible (p est petit), les erreurs de plus petits poids sont plus probables que les erreurs de grands poids. Pour corriger le système, on choisit donc d'appliquer l'erreur de Pauli de plus petit poids compte tenu du syndrome mesuré. On appelle ce genre de correction le décodage à distance minimale. La notion du poids d'une erreur permet d'introduire la distance d'un code. La distance d d'un code est égale au poids de l'erreur logique de plus petit poids. En corrigeant l'erreur à l'aide du décodage à distance minimale, on corrige toujours parfaitement l'erreur E si celle-ci est d'un poids égal ou inférieur à $t = (d-1)/2$. Le code protège efficacement les qubits lorsque toute cette procédure contribue à faire diminuer les risques d'erreurs logiques dans le système.

Jusqu'à maintenant, on a supposé que l'erreur E s'étant produite sur l'état $|\psi\rangle$ était une erreur de Pauli. Le cas général peut cependant être traité de façon similaire. En effet, comme les opérateurs de Pauli forment une base, on peut écrire un opérateur quelconque comme suit :

$$E = \sum_i \alpha_i P_i \quad (1.24)$$

où P_i est un opérateur de Pauli et α_i est un nombre complexe. En raison du postulat de la mesure en mécanique quantique, une mesure du syndrome aura comme effet d'éliminer certains éléments de cette somme d'opérateurs de Pauli : seuls les opérateurs de Pauli auxquels on associe le syndrome mesuré restent présents. Suite à une mesure du syndrome sur l'état affecté par l'erreur $E|\psi\rangle$, celui-ci s'effondrera dans l'état $E'|\psi\rangle$, où :

$$E' = C \sum_{i'} \alpha_{i'} P_{i'} \quad (1.25)$$

où C est une constante de normalisation et les $P_{i'}$ sont les erreurs de Pauli associées au syndrome mesuré. On peut ensuite corriger l'erreur de la même façon qu'on corrige une erreur de Pauli, par exemple, en utilisant le décodage à distance minimale. Si $\{P_{i'}\}$ est un ensemble d'erreur de Pauli qui sont corrigées par le code, alors n'importe quelle

superposition linéaire l'est aussi. Autrement dit, si l'opérateur de correction utilisé est dégénéré avec tous les P_i , alors l'erreur a été corrigée parfaitement. Si le code est de distance d , il est alors possible de corriger une erreur arbitraire qui s'applique sur un nombre égal ou inférieur à $t = (d - 1)/2$ qubits [13, 14].

1.1.3 Le code à trois qubits

Le code à trois qubits est un exemple de code stabilisateur qui est efficace contre les erreurs d'inversion. Une erreur d'inversion se produit lorsque la matrice de Pauli σ_x s'applique sur un qubit. Concrètement, cela signifie qu'un qubit dans l'état $|0\rangle$ passe dans l'état $|1\rangle$ et vice-versa.

Le code à trois qubits consiste à encoder un qubit d'information dans trois qubits. L'état $|0\rangle$ devient $|000\rangle$ et l'état $|1\rangle$ devient $|111\rangle$; un état arbitraire $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ est donc encodé comme $\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$.

Pour vérifier si une inversion s'est produite sur le système, on effectue une mesure de parité sur les deux premiers qubits et sur les deux derniers. Une mesure de parité détermine si deux qubits sont dans le même état, soit $|00\rangle$ ou $|11\rangle$ (parité paire), ou dans des états différents, soit $|10\rangle$ ou $|01\rangle$ (parité impaire). Comme la mesure de parité ne permet pas de distinguer deux états d'une même parité, on évite de détruire les superposition d'états. Par exemple, si on mesure une parité paire pour les deux premiers qubits et une parité impaire pour les deux derniers, on peut en déduire que le troisième qubit est différent des deux autres, sans toutefois distinguer si les qubits sont dans l'état $|001\rangle$ ou dans l'état $|110\rangle$. Le scénario le plus probable si on suppose que le bruit est faible et indépendant est que le troisième qubit ait subi une inversion, on corrige en l'inversant de nouveau.

Sous le formalisme des codes stabilisateurs présenté plus haut, on a pour le code à trois qubits que $k = 1$ et que $n = 3$. Les mots codes sont $|000\rangle$ et $|111\rangle$. Il y a donc $m = 3 - 1 = 2$ générateurs du groupe stabilisateur et donc $2^m = 4$ stabilisateurs. Les générateurs du groupe stabilisateurs sont $S_1 = \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes I$ et $S_2 = I \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z$. Comme il a été mentionné plus haut, on trouve les autres stabilisateurs en effectuant un produit des générateurs. Ces stabilisateurs sont : $\sigma_z \otimes I \otimes \sigma_z$ et $I \otimes I \otimes I$. Dans le cas où le troisième qubit est différent des deux autres, une mesure du générateur S_1 donne 1 et une mesure du générateur S_2 donne -1. Le décodage à distance minimale indique qu'il faut corriger en appliquant l'opérateur de Pauli de plus petit poids, c'est-à-dire $I \otimes I \otimes \sigma_x$. En théorie,

l'opération $I \otimes I \otimes \sigma_y$ a le même poids que $I \otimes I \otimes \sigma_x$, cependant, le code à trois qubits ne traite que des erreurs d'inversions.

Le tableau 1.1 montre les corrections à appliquer en fonction des différents syndromes mesurés. La première colonne du tableau montre les différents syndromes qu'il est possible d'obtenir en mesurant les générateurs du groupe stabilisateur. La deuxième colonne montre une base d'état qui génère le sous-espace associé à chaque syndrome. La dernière colonne montre la correction à appliquer dans chaque cas.

syndrome	base d'états possibles	correction
$S_1 = 1 \ S_2 = 1$	$ 000\rangle, 111\rangle$	I
$S_1 = -1 \ S_2 = 1$	$ 100\rangle, 011\rangle$	$\sigma_x \otimes I \otimes I$
$S_1 = 1 \ S_2 = -1$	$ 001\rangle, 110\rangle$	$I \otimes I \otimes \sigma_x$
$S_1 = -1 \ S_2 = -1$	$ 010\rangle, 101\rangle$	$I \otimes \sigma_x \otimes I$

TABLEAU 1.1 – Correction d'erreur avec le code à trois qubits

Le problème du code à trois qubits est qu'il ne corrige que les erreurs d'inversion. On le voit en écrivant les opérateurs logiques du code :

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \quad (1.26)$$

$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z \otimes I \otimes I \quad (1.27)$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \quad (1.28)$$

L'opération logique de plus petit poids est $\bar{\sigma}_z$, opération ne contenant qu'un opérateur qui diffère de l'identité, donc de poids 1. La distance du code à trois qubits est donc égale à 1. De ce fait, le code à trois qubits ne peut corriger une erreur arbitraire sur un qubit, telle que la relaxation ou le déphasage. Il protège une information classique : les mots codes sont bien protégés mais pas leurs superpositions.

1.1.4 Le code à quatre qubits

Dans le code à quatre qubits, on utilise quatre qubits pour représenter l'état d'un seul qubit logique. Les mots-codes sont :

$$|0_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle) \quad (1.29)$$

$$|1_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0011\rangle + |1100\rangle) \quad (1.30)$$

Les générateurs du groupe stabilisateur sont $S_1 = \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes I \otimes I$, $S_2 = I \otimes I \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z$ et $S_3 = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x$. Les générateurs S_1 et S_2 vérifient la parité des deux premiers qubits et des deux derniers qubits respectivement. Le générateur S_3 permet de distinguer le mot code $|0_L\rangle$ de l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle - |1111\rangle)$ et le mot code $|1_L\rangle$ de l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0011\rangle - |1100\rangle)$.

Le code à quatre qubits a ceci de particulier qu'il est adapté contre la relaxation, cette dernière ne faisant pas partie des erreurs de Pauli. La relaxation est associée à une perte d'énergie dans le système. Dans un canal de relaxation, deux scénarios sont envisageables pour un qubit : ou bien rien ne se produit, ou bien le qubit relaxe dans son état fondamental. Si le qubit subit une relaxation, tout se passe comme si on mesurait que le qubit était initialement dans son état excité $|1\rangle$ et qu'il venait de s'effondrer dans son fondamental $|0\rangle$. On peut également comprendre le scénario où rien ne se produit comme une mesure partielle du système dans son état fondamental puisque si rien ne se produit, il est plus probable que le qubit se trouvait initialement dans l'état fondamental, ce dernier ne pouvant pas subir de relaxation. Ces deux scénarios sont représentés par les opérateurs de Kraus suivants :

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

où λ est la probabilité qu'une relaxation se produise sur un qubit.

Lorsqu'un état arbitraire dans l'espace code $|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$ est soumis au canal de relaxation, ce dernier évolue vers un mélange statistique des états suivants :

$$E_0 \otimes E_0 \otimes E_0 \otimes E_0 |\psi\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + (1-\lambda)^2|1111\rangle) + (1-\lambda)\frac{\beta}{\sqrt{2}}|1_L\rangle \quad (1.32)$$

$$E_1 \otimes E_0 \otimes E_0 \otimes E_0 |\psi\rangle = \sqrt{(1-\lambda)^3\lambda}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0111\rangle + \sqrt{(1-\lambda)\lambda}\frac{\beta}{\sqrt{2}}|0100\rangle \quad (1.33)$$

$$E_0 \otimes E_1 \otimes E_0 \otimes E_0 |\psi\rangle = \sqrt{(1-\lambda)^3\lambda}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|1011\rangle + \sqrt{(1-\lambda)\lambda}\frac{\beta}{\sqrt{2}}|1000\rangle \quad (1.34)$$

$$E_0 \otimes E_0 \otimes E_1 \otimes E_0 |\psi\rangle = \sqrt{(1-\lambda)^3\lambda}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|1101\rangle + \sqrt{(1-\lambda)\lambda}\frac{\beta}{\sqrt{2}}|0001\rangle \quad (1.35)$$

$$E_0 \otimes E_0 \otimes E_0 \otimes E_1 |\psi\rangle = \sqrt{(1-\lambda)^3\lambda}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|1110\rangle + \sqrt{(1-\lambda)\lambda}\frac{\beta}{\sqrt{2}}|0010\rangle \quad (1.36)$$

$$\dots \quad (1.37)$$

où on a omis les cas où plus d'un qubit relaxe (où l'opérateur E_1 s'applique sur plus d'un qubit) qu'on considère moins probables. En effet, ces événements se produisent avec une probabilité $\sim \lambda^2$ beaucoup plus petite que la probabilité λ qu'un qubit subisse une relaxation. Si plus d'une relaxation a lieu, il est parfois impossible de corriger l'erreur parfaitement. Par exemple, si une relaxation a lieu sur le premier et le troisième qubit, on a :

$$E_1 \otimes E_0 \otimes E_1 \otimes E_0 |\psi\rangle = (1 - \lambda) \lambda \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |0101\rangle \quad (1.38)$$

Dans un tel cas, le canal détruit l'état de superposition entre les mots-codes et seul l'état $|0_L\rangle$ peut être récupéré. En effet, on remarque que le coefficient β a disparu.

Pour diagnostiquer l'erreur qui s'est produite sur le système, on omet de mesurer le générateur S_3 et on ne mesure que les générateurs S_1 et S_2 [20, 21]. En effet, le générateur S_3 n'est pas nécessaire pour détecter si une relaxation s'est produite ou non sur les qubits. D'ailleurs, les états (1.32) à (1.36) ne sont pas des états propres de ce stabilisateur. Le générateur S_1 permet de détecter si une relaxation s'est produite sur le premier ou le second qubit, et le générateur S_2 permet de détecter si une relaxation s'est produite sur le troisième et le quatrième qubit.

La correction ne se fait pas non plus de manière traditionnelle, c'est-à-dire en appliquant l'erreur de Pauli la plus probable. Leung et al. [20] ont proposé un circuit pour corriger efficacement les erreurs à partir des mesures de S_1 et S_2 . La correction effectuée dépend de la probabilité λ qu'un qubit relaxe dans son état fondamental. Nous verrons plus loin comment effectuer une correction optimale lorsque les mesures sont imparfaites, généralisant la méthode de Leung et al.

1.2 Les qubits supraconducteurs

Les qubits supraconducteurs sont de bons candidats pour servir d'unité de base dans un ordinateur quantique. Plusieurs expériences ont déjà été réalisées sur ces derniers, notamment la réalisation des algorithmes quantiques de Deutsch-Jozsa et de Grover [22], la violation des inégalités de Bell [23] et plus récemment, la génération d'états intriqués à trois qubits [24, 25]. Dans cette section, on explique d'abord ce qu'est un qubit supraconducteur, puis on parle de la méthode employée pour effectuer une mesure sur ceux-ci. La mesure de parité nécessaire pour les codes à trois et à quatre qubit est finalement

expliquée.

1.2.1 Les composants d'un qubit supraconducteur

Les qubits supraconducteurs sont des circuits électriques microfabriqués. Ces circuits ont des états discrets d'énergie et deux d'entre eux, le niveau fondamental et le premier état excité, sont utilisés comme états logiques $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Pour que de tels circuits présentent un comportement quantique, il faut d'abord qu'il y ait peu de dissipation dans le système afin de préserver la cohérence. Pour satisfaire ce premier critère, l'absence de résistance des matériaux supraconducteurs est un atout.

Ensuite, pour s'en servir en tant que qubits, il faut que les niveaux d'énergie ne soient pas également espacés en fréquence. En effet, pour effectuer des opérations sur un qubit supraconducteur, on envoie une excitation dont la fréquence correspond à la différence entre deux niveaux d'énergie, ce qui a pour effet d'engendrer des oscillations de Rabi [26]. Si les niveaux étaient également espacés, un tel pulse affecterait plus de deux niveaux et le système ne se comporterait pas comme un qubit.

Si le circuit ne comprend que des condensateurs et des boucles de courants, son hamiltonien est quadratique comme celui d'un oscillateur harmonique, ses niveaux d'énergie sont alors également espacés en fréquence. Pour le voir, on introduit d'abord la notion de flux, soit [27] :

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t V(t_1) dt_1 \quad (1.39)$$

où V est le voltage, soit l'intégrale spatiale du champ électrique le long d'une ligne de courant. Un tel flux est défini pour tous les éléments d'un circuit, pas seulement les inductances. Le courant traversant une boucle d'inductance L est directement proportionnel à ce flux :

$$I(t) = \frac{\Phi(t)}{L} \quad (1.40)$$

Il existe une relation d'incertitude entre le flux Φ et la charge Q , similaire à celle entre la position et la quantité de mouvement. Ces deux quantités obéissent à la relation de commutation $[\Phi, Q] = \imath$. On peut écrire l'hamiltonien d'un circuit LC en fonction du flux Φ traversant une boucle de courant d'inductance L et de la charge Q aux bornes d'un condensateur de capacité C comme [27] :

$$H = \frac{\Phi^2}{2L} + \frac{Q^2}{2C} \quad (1.41)$$

En associant le flux à la position et la charge à la quantité de mouvement, on reconnaît bien l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique. On peut réécrire l'hamiltonien du circuit LC comme :

$$H = \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.42)$$

où n est le nombre d'excitations dans le circuit et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Sous cette forme, on voit que les niveaux d'énergie sont des multiples demi-entiers de la fréquence ω_0 .

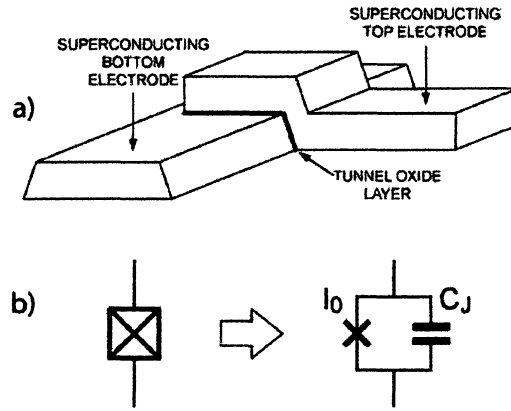


FIGURE 1.1 – La jonction de Josephson et sa représentation dans un circuit. Figure tirée de la réf. [27].

Pour que les niveaux d'énergies ne soient pas également espacés, on ajoute au circuit des jonctions Josephson (voir figure 1.1) [27]. Les jonctions Josephson sont une mince couche isolante entre deux supraconducteurs que les paires de Cooper peuvent traverser de façon cohérente par effet tunnel. Elles agissent comme une inductance non-linéaire branchée en parallèle avec un condensateur. En effet, le courant à travers la jonction n'est pas directement proportionnel au flux comme pour la boucle de courant, on observe plutôt la relation suivante :

$$I(t) = I_0 \sin[2\pi\Phi(t)/\Phi_0] \quad (1.43)$$

où Φ_0 est un quanta de flux et I_0 est le courant critique de la jonction, soit le courant

maximal pour lequel il n'y a pas de dissipation. L'ajout d'une jonction Josephson au circuit ajoute un terme à son hamiltonien, lequel est de la forme suivante :

$$H = E_C(N - n_g)^2 - E_J \cos(2\pi\Phi(t)/\Phi_0) \quad (1.44)$$

où $E_C = (2e)^2/2C_J$ est l'énergie de charge par paire de Cooper associée à la capacité de la jonction et $E_J = \Phi_0 I_0/2\pi$ est l'énergie de Josephson. N est le nombre de charges ayant traversé la jonction et n_g est un nombre de charges résiduelles aux bornes de la jonction pouvant être du à un voltage aux bornes de la jonction ou à des impuretés.

Il est possible de combiner différemment les composants d'un circuit électrique avec des jonctions Josephson pour former différentes sortes de qubits supraconducteurs. Un exemple est le qubit de charge (voir figure 1.2). Un qubit de charge consiste en une jonction Josephson branchée en série avec un condensateur. Ces deux éléments forment une île supraconductrice. Le tout est connecté à une source de voltage. Souvent, on remplace la jonction Josephson par un SQUID (deux jonctions branchées en parallèle) qui agit comme une jonction dont on peut modifier l'énergie de Josephson [27]. L'hamiltonien d'un tel circuit a la même forme que celui de la jonction Josephson (voir équation 1.44), mais on ajuste les paramètres de sorte que l'énergie de charge soit beaucoup plus grande que l'énergie de Josephson ($E_C \gg E_J$). En effet, l'ajout d'un condensateur en série avec la jonction diminue la capacité totale du circuit, ce qui augmente l'énergie de charge. Pour cette raison, la charge est un nombre quantique important dans ce circuit. Les niveaux d'énergie correspondent donc à des états de charges. De ce fait, le qubit de charge est très sensible aux fluctuations de charges qui causent du déphasage.

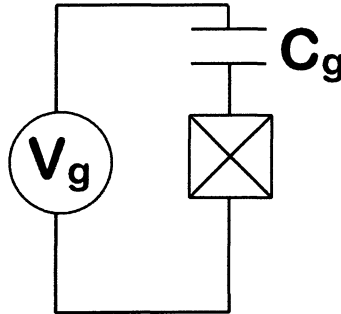


FIGURE 1.2 – Qubit de charge. Figure tirée de la ref. [28].

Le transmon, un autre exemple de qubit supraconducteur, ressemble beaucoup au

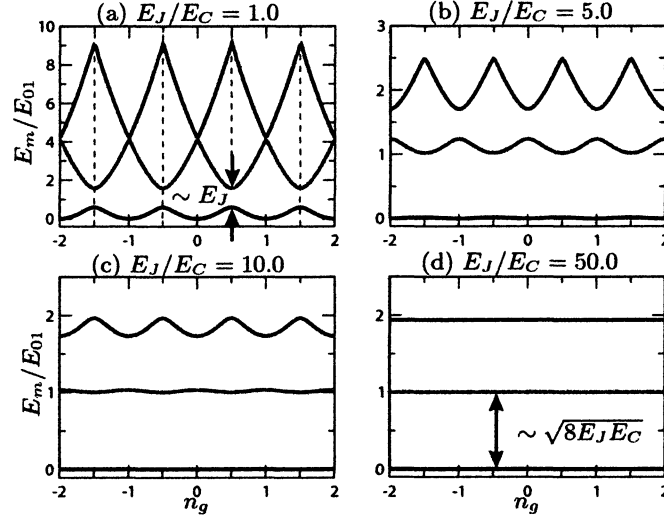


FIGURE 1.3 – Niveaux d'énergie E_m/E_{01} d'un qubit de charge en fonction de la charge résiduelle n_g , pour différents ratios E_J/E_C . E_m est l'énergie du niveau m et E_{01} est l'énergie de transition minimale entre les deux premiers niveaux. Les courbes noires représentent l'état fondamental d'énergie, les courbes rouges correspondent au premier état excité et les courbes bleues sont pour le second état excité. Figure tirée de la réf. [29].

qubit de charge, mais il est opéré à un ratio E_J/E_C plus élevé. La figure 1.3 illustre l'effet d'une augmentation de ce ratio sur les différents niveaux d'énergie. Lorsque le ratio E_J/E_C augmente, la dépendance en n_g des états d'énergie diminue. On en déduit qu'ils ne sont alors plus associés à un nombre fixe de paires de Cooper présentes dans l'île supraconductrice. De ce fait, le transmon est bien moins sensible au bruit de charge. Son temps de déphasage pur caractéristique est de l'ordre d'une dizaine de microsecondes, ce qui représente un gain important par rapport au qubit de charge. En pratique, le temps de déphasage est limité par la relaxation, qui induit du déphasage. Le temps de relaxation caractéristique est de l'ordre de la microseconde [29–31].

1.2.2 Électrodynamique en circuit

Pour mesurer l'état d'un qubit supraconducteur de type transmon, on le couple capacitivement à un résonateur coplanaire supraconducteur. La physique d'un tel système est très similaire à celle d'un atome à l'intérieur d'une cavité résonante (voir figure 1.4) [26, 32, 33].

Lorsqu'un atome se retrouve dans une cavité, ces deux éléments se couplent via une interaction dipolaire-électrique. La force de cette interaction est notée g . Les sources de

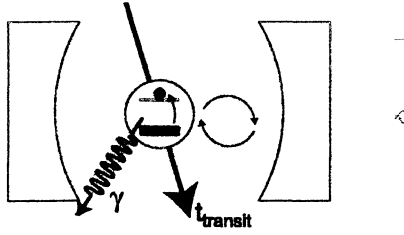


FIGURE 1.4 – Atome dans une cavité résonante. Figure tirée de la réf. [26].

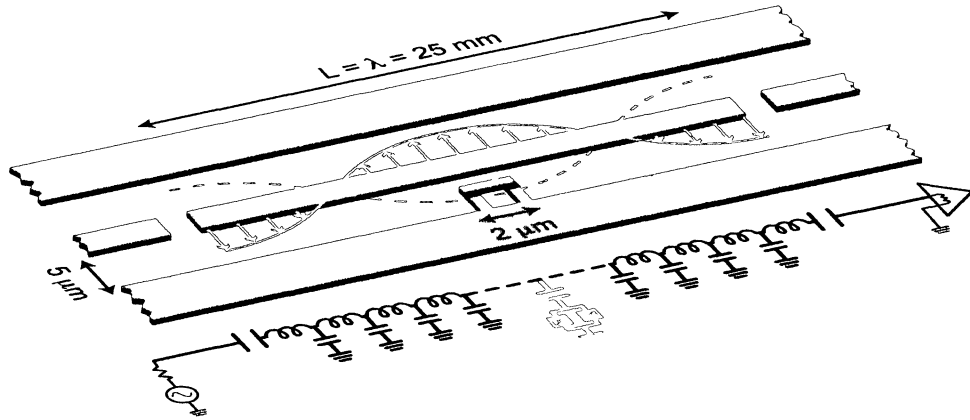


FIGURE 1.5 – Qubit supraconducteur couplé à un résonateur. Figure tirée de la réf. [35].

dissipation d'un tel système sont associées à un taux de relaxation de la cavité κ et de l'atome γ_1 ainsi qu'un taux de déphasage de l'atome γ_φ . L'atome passe typiquement un temps égal à t_{transit} avant de s'échapper de la cavité [34].

Dans le système étudié ici (voir figure 1.5), le qubit supraconducteur joue le rôle de l'atome et le résonateur coplanaire joue le rôle de la cavité. Il est possible d'atteindre de grands couplages avec de tels systèmes [36–38]. L'hamiltonien décrivant l'énergie d'un qubit couplé à un résonateur peut s'écrire comme suit :

$$H = \frac{\omega_a}{2}\sigma_z + \omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + g(a^\dagger + a)\sigma_x \quad (1.45)$$

où ω_r est la fréquence du mode du résonateur auquel le qubit se couple, a et a^\dagger sont les opérateurs d'échelle des photons dans le résonateur, ω_a est l'énergie entre les deux niveaux du qubit et g est la force du couplage entre le transmon et le résonateur. Les deux premiers termes de cet hamiltonien décrivent l'énergie du résonateur et du qubit, le dernier terme est le couplage entre le qubit et le résonateur. Lorsque le couplage est beaucoup plus

petit que la somme des fréquences du qubit et du mode du résonateur auquel se couple le qubit ($g \ll \omega_a + \omega_r$), on peut utiliser l'approximation séculaire, ou «rotating-wave approximation» (RWA), qui consiste à laisser tomber les termes de couplage $a^\dagger \sigma_+$ et $a \sigma_-$. En effet, ces termes ne conservent pas le nombre total d'excitations et oscillent à une fréquence élevée ; on peut les laisser tomber [34]. Dans cette approximation, le terme de couplage est donc $g(a\sigma_+ + a^\dagger \sigma_-)$.

Lorsque le qubit a la même fréquence que celle du résonateur, on observe un couplage direct entre ces deux éléments. Les états propres du système complet sont alors des états intriqués entre le qubit et le résonateur. Pour la correction d'erreur, il faut cependant éviter que le résonateur ne détruise l'état du qubit. On se place donc dans le régime dispersif, où la différence de fréquence entre le qubit et le résonateur $\Delta = \omega_a - \omega_r$ est beaucoup plus grande que leur couplage. Dans un tel régime de paramètre, le résonateur ne fait que perturber l'état du qubit et vice versa, ce qui fait en sorte que cette mesure ne démolit pas l'état des qubits. L'hamiltonien peut alors s'écrire comme suit [16] :

$$H_{\text{dispersif}} = \frac{\tilde{\omega}_a}{2} \sigma_z + (\omega_r + \chi \sigma_z) a^\dagger a \quad (1.46)$$

On remarque que le couplage dispersif avec un résonateur modifie la fréquence du qubit : on a que $\tilde{\omega}_a = \omega_a + \chi$, où $\chi = \frac{g^2}{\Delta}$. Ce changement de fréquence est le décalage de Lamb. Le qubit a également pour effet de déplacer le mode du résonateur d'une fréquence $\pm \chi$ dont le signe dépend de l'état dans lequel se trouve le qubit. Cet effet est illustré à la figure 1.6 et est important pour la mesure. En effet, pour effectuer une mesure, on envoie une excitation électromagnétique au résonateur. En raison du décalage en fréquence induit par le qubit, le signal en sortie du résonateur dépend de l'état dans lequel se trouve le qubit.

Il est important de noter qu'un tel couplage au résonateur augmente aussi le taux de relaxation d'un qubit. Cet effet est connu sous le nom d'effet Purcell, il peut devenir la source d'erreur dominante [35, 39].

On modélise l'excitation envoyée au résonateur en ajoutant un terme à l'hamiltonien dispersif (1.46). Lorsqu'on mesure le qubit, la fréquence de l'excitation doit être près de celle du résonateur. Le terme prend alors la forme suivante [28] :

$$H_D = \sum_{j=1}^2 (\epsilon(t) a^\dagger + \text{c.h.}) \quad (1.47)$$

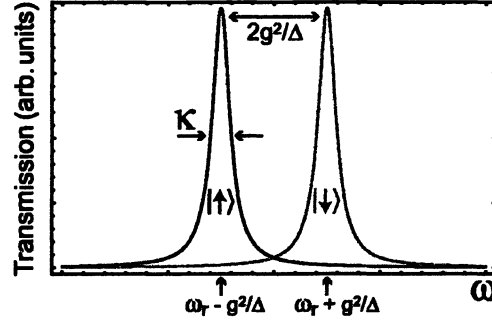


FIGURE 1.6 – Amplitude du signal en sortie d'un résonateur couplé à un qubit en fonction de la fréquence du signal d'entrée. La fréquence du résonateur dépend de l'état du qubit. Figure tirée de la réf. [26].

où $\epsilon(t)$ est l'amplitude de l'excitation envoyée au résonateur. Celle-ci est modélisée de la façon suivante :

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \tanh\left(\frac{t - t_0}{\sigma}\right) e^{-\omega_d t} \quad (1.48)$$

où t_0 est le temps auquel on démarre l'excitation, ϵ_0 est l'amplitude maximale d'excitation et ω_d est la fréquence de l'excitation. σ est un paramètre caractérisant le temps pour lequel l'amplitude maximale est atteinte. L'excitation envoyée aux résonateurs induit un nombre moyen de photon égal à [28] :

$$\langle n \rangle = \frac{\epsilon(t)^2}{(\tilde{\omega}_r - \omega_m)^2 + (\kappa/2)^2} \quad (1.49)$$

où ϵ est l'amplitude de l'excitation, $\tilde{\omega}_r$ est la fréquence du résonateur déplacée par les qubits, ω_m est la fréquence de l'excitation et κ est le taux de relaxation du résonateur. Pour rester dans l'approximation dispersive, le nombre de photons dans le résonateur doit être beaucoup petit qu'un nombre critique de photons égal à [28] :

$$n_{\text{crit}} = \frac{1}{4\lambda^2} \quad (1.50)$$

où $\lambda = \frac{g}{\omega_a - \omega_r} = \frac{g}{\Delta}$. L'excitation envoyée au résonateur a également pour effet de déplacer davantage la fréquence du qubit. Ce déplacement dépend du nombre de photons dans le résonateur. La fréquence d'un qubit couplé à un résonateur contenant des photons dans le régime dispersif est [26] :

$$\tilde{\omega}_a = \omega_a + 2\chi(1 + \frac{1}{2}a^\dagger a) \quad (1.51)$$

1.2.3 Mesure homodyne

À la section précédente, on a vu que pour mesurer l'état d'un qubit supraconducteur, on peut le coupler avec un résonateur. Il faut par la suite envoyer une excitation électromagnétique à ce résonateur et mesurer le signal en sortie. Ce signal dépend de l'état dans lequel se trouve le qubit. La technique de mesure utilisée est la mesure homodyne.

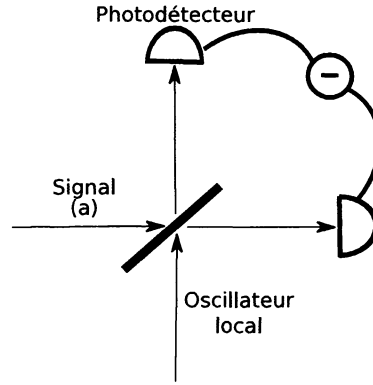


FIGURE 1.7 – Mesure homodyne d'un signal a .

Dans le but de comprendre ce qu'est la mesure homodyne, on peut encore une fois faire une analogie avec un système optique. La figure 1.7 illustre le fonctionnement d'une mesure homodyne d'un signal optique. Le signal, noté a , est envoyé vers une lame semi-réfléchissante. À l'autre port d'entrée de la lame, on envoie un signal d'intensité $|\alpha_{LO}|$ dont la phase ϕ_{LO} est bien définie. Ce signal, qu'on appelle «oscillateur local», est de même fréquence que le signal qu'il faut mesurer, mais d'intensité grandement supérieure. Au lieu de mesurer le signal à un seul port de sortie comme dans une expérience d'interférométrie classique, on place des photodétecteurs aux deux sorties de la lame et on mesure la différence I des signaux. Lorsque le coefficient de réflexion de la lame est égal à son coefficient de transmission, ce calcul donne [40] :

$$I = -i|\alpha_{LO}|\langle\hat{X}_{LO}\rangle \quad (1.52)$$

où :

$$\hat{X}_{\text{LO}} = (a^\dagger + a) \cos(\phi_{\text{LO}}) + i(a^\dagger - a) \sin(\phi_{\text{LO}}) \quad (1.53)$$

$$= \hat{x} \cos(\phi_{\text{LO}}) + \hat{p} \sin(\phi_{\text{LO}}) \quad (1.54)$$

Ainsi, en faisant varier la phase de l'oscillateur local ϕ_{LO} , on mesure différentes quadratures du signal telles que \hat{x} ou \hat{p} . Dans le cas d'une mesure sur un qubit supraconducteur, la mesure homodyne est effectuée en couplant le signal avec un oscillateur local, mais comme le signal est cette fois sous forme de voltage, on utilise un mixer (voir figure 1.8) [41].

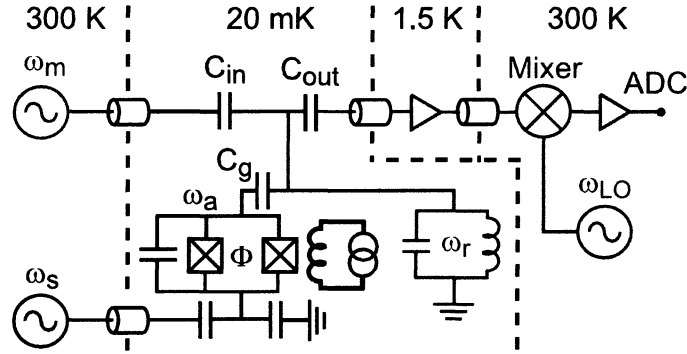


FIGURE 1.8 – Circuit utilisé pour effectuer une mesure homodyne sur un qubit supraconducteur. Les composants utilisés pour mesurer le signal sont en gris. Le signal est amplifié puis couplé à un oscillateur local grâce à un mixer. Le qubit est en bleu et le résonateur, représenté par un circuit LC, est en rouge. On peut effectuer des opérations sur le qubit en appliquant un pulse de fréquence ω_s . Le circuit en magenta sert à appliquer un champ magnétique externe Φ afin d'ajuster la fréquence ω_a du qubit. Figure tirée de la réf. [16].

Dans une mesure de type dispersive, le signal en sortie du résonateur est un état cohérent dont l'amplitude α dépend de l'état dans lequel se trouve le qubit. Un état cohérent s'écrit comme suit :

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.55)$$

Le fait que l'amplitude α dépende de l'état des qubits est dû au déplacement de la fréquence du résonateur dû à la présence du qubit. En effet, cette amplitude évolue selon

l'équation suivante [42] :

$$\dot{\alpha}_j = -i(\omega_r - (-1)^j \chi) \alpha_j - i\epsilon(t) - \frac{\kappa}{2} \alpha_j \quad (1.56)$$

où ω_r est la fréquence du résonateur sans qubit, χ est l'amplitude du couplage dispersif, $\epsilon(t)$ est l'excitation envoyée au résonateur, voir l'équation (1.48), κ est le taux de relaxation du résonateur et j est l'état du qubit, où j vaut 0 ou 1.

La figure 1.9 montre l'amplitude des états cohérents selon les quadratures \hat{x} (axe horizontal) et \hat{q} (axe vertical) selon que le qubit est dans l'état $|0\rangle$ (α_g) ou l'état $|1\rangle$ (α_e). Le fait qu'ils soient représentés par un cercle et non un point indique une incertitude : en effet, les quadrature \hat{x} et \hat{p} ne commutent pas entre elles. On voit que, dans ce cas-ci, mesurer la quadrature \hat{x} du signal permet de déterminer si le qubit est dans l'état $|0\rangle$ ou dans l'état $|1\rangle$.

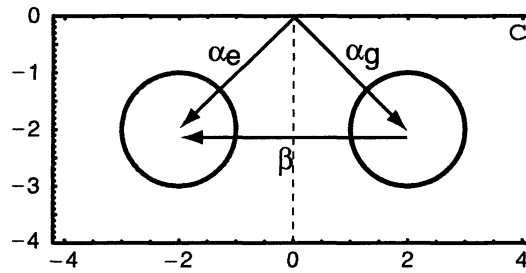


FIGURE 1.9 – Amplitude des états cohérents selon les quadratures \hat{x} (axe horizontal) et \hat{q} (axe vertical) si le qubit est dans l'état $|0\rangle$ (α_g) ou l'état $|1\rangle$ (α_e). $\beta = \alpha_e - \alpha_g$ est la distance entre ces deux états cohérents. Figure tirée de la réf. [42].

La mesure homodyne est une mesure continue. Comme le signal est couplé à un oscillateur local de haute intensité, la présence d'un photon dans le signal ne change pas drastiquement la connaissance qu'on a du système. Il faut donc mesurer sur une certaine période de temps. Aussi, cette mesure n'est pas d'une efficacité parfaite, et ce, pour plusieurs raisons. La raison la plus importante est qu'il faut d'abord amplifier le signal avant de le mesurer. L'amplification ajoute du bruit dans le signal.

On modélise l'effet d'une mesure homodyne sur le système en ajoutant un terme stochastique à l'équation maîtresse gouvernant son évolution (voir équation (1.9) dans la section 1.1.1). Cette dernière peut maintenant s'écrire comme suit [28, 43] :

$$\rho_s = \mathcal{L}\rho_s + \sqrt{\kappa\eta}\xi(t)\mathcal{H}[ae^{-i\phi}]\rho_s \quad (1.57)$$

où $\mathcal{H}[x]\rho = x\rho + \rho x^\dagger - \text{Tr}[x\rho + \rho x^\dagger]\rho$, ϕ est la phase de l'oscillateur local, κ est le taux de relaxation du résonateur et η est l'efficacité de la mesure. $\xi(t)$ est un bruit blanc gaussien qui satisfait [28, 42] :

$$E[\xi(t)] = 0 \quad (1.58)$$

$$E[\xi(t)\xi(t')] = \delta(t - t') \quad (1.59)$$

où $E[x]$ est l'espérance de x . L'indice s indique que l'état ρ_s est conditionnel au signal J qu'on mesure, voir l'équation (1.54). Ce dernier peut s'écrire comme suit :

$$J = \sqrt{\kappa\eta}\langle ae^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi} \rangle \quad (1.60)$$

1.2.4 Mesure de parité

La mesure de parité est importante pour la correction d'erreur. En effet, pour mesurer le syndrome des codes à trois et à quatre qubits, on a vu qu'il faut effectuer des mesures de parité (voir sections 1.1.3 et 1.1.4). La mesure de parité sur les qubits supraconducteurs a été développée par Kevin Lalumière et al. [28, 44]

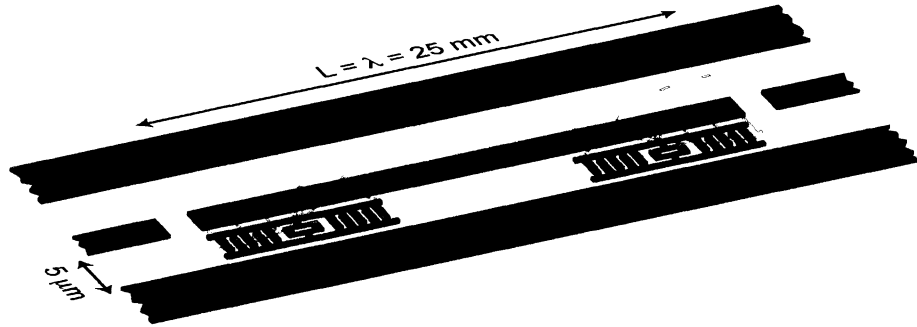


FIGURE 1.10 – Deux qubits couplés à un résonateur pour effectuer une mesure de parité. Figure tirée de la réf. [45]

Afin d'effectuer une mesure de parité sur des qubits supraconducteurs, il faut d'abord en coupler deux à un même résonateur (voir figure 1.10). Dans le régime dispersif, on observe alors que la fréquence du résonateur est décalée d'une amplitude $\pm\chi_1$ dû à la présence du premier qubit et d'une amplitude $\pm\chi_2$ due la présence du second qubit. Le

déplacement total de la fréquence du résonateur due aux qubits peut donc être exprimé comme suit :

$$\chi_\sigma = (\chi_1 \sigma_z^1 + \chi_2 \sigma_z^2) |\sigma\rangle \quad (1.61)$$

où $\sigma = \{00, 01, 10, 11\}$ est l'état dans lequel se trouvent les deux qubits. On a vu que l'état cohérent mesuré en sortie du résonateur dépendait de ce décalage, voir équation (1.56). Si, par exemple, on a que $\chi_{00} = \chi_{11}$, l'état cohérent a la même amplitude lorsque les qubits sont dans l'état $|00\rangle$ ou dans l'état $|11\rangle$ et la mesure ne permet pas de distinguer les états de parité paire.

Pour effectuer une mesure de parité idéale, il faudrait que $\chi_{00} = \chi_{11}$, que $\chi_{01} = \chi_{10}$ et que $\chi_{00} \neq \chi_{01}$. Ces conditions signifient que la mesure ne permet pas de distinguer des états d'une même parité, mais qu'il est possible de distinguer des états de parité différente. Ces conditions ne peuvent malheureusement pas être remplies simultanément. La stratégie à adopter est de n'obéir qu'à une seule de ces égalités, par exemple, de faire en sorte que $\chi_{00} = \chi_{11}$, ce qui rend impossible de distinguer les états d'une certaine parité. On ajuste ensuite la phase de l'oscillateur local dans la mesure homodyne afin de mesurer une quadrature du signal ne permettant pas de distinguer les états de l'autre parité [28, 44]. La figure 1.11 illustre cette stratégie. Pour obtenir des états cohérents tels que montrés dans cette figure, on fait en sorte de respecter la condition $\chi_{10} = \chi_{01}$. Ainsi, les amplitudes des états cohérents associés aux états $|01\rangle$ et $|10\rangle$ sont égales et on ne peut distinguer ces deux états par une mesure. On constate également que le fait de mesurer selon la quadrature \hat{q} ne permet pas de distinguer l'état $|00\rangle$ de l'état $|11\rangle$. On peut donc effectuer la mesure de parité de cette façon.

Même si la mesure ne permet pas de distinguer deux états de même parité, cette dernière peut induire du déphasage entre ces deux états. En développant une équation maîtresse gouvernant l'évolution de deux qubits dans un résonateur, Lalumière et al. ont montré que le déphasage induit par la mesure se fait à un taux moyen égal à [28, 44] :

$$\Gamma_d^{\sigma\sigma'} = (\chi_\sigma - \chi_{\sigma'}) \text{Im}[\alpha_\sigma \alpha_{\sigma'}^*] \quad (1.62)$$

où σ et σ' sont des états à deux qubits et α_σ est l'état cohérent dans le résonateur si les qubits sont dans l'état σ . On en conclut que la mesure induit du déphasage entre les états pour lesquels le décalage du résonateur χ_σ est différent. Il est donc possible de protéger un sous-espace associé à une certaine parité contre cet effet, mais pas les deux.

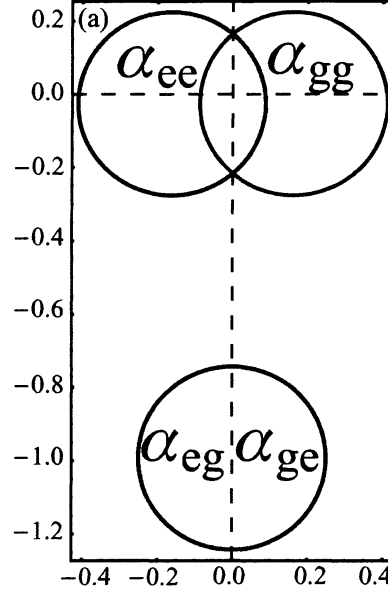


FIGURE 1.11 – État cohérent dans le résonateur si le qubit est dans l'état $|00\rangle$ (α_{gg}), $|11\rangle$ (α_{ee}), $|01\rangle$ (α_{ge}) ou $|10\rangle$ (α_{eg}), dans le cas d'une mesure de parité. L'axe horizontal est la quadrature \hat{x} , l'axe vertical est la quadrature \hat{q} . Mesurer le signal selon l'axe vertical ne permet pas de distinguer les états d'une même parité. Figure tirée de la réf. [44].

1.3 Obstacles pour la correction d'erreur

Dans les sections précédentes, le principe général de la correction d'erreur a été expliqué, puis un exemple d'architecture qui pourrait potentiellement jouer le rôle de qubit dans un ordinateur quantique, les qubits supraconducteurs, a été présenté. On constate que, pour effectuer de la correction d'erreur sur des systèmes tels que les qubits supraconducteurs, il y a plusieurs obstacles à surmonter.

Le principal obstacle à la correction d'erreur concerne la mesure. Dans un processus de correction traditionnel, on effectue une mesure du syndrome après que le système ait été exposé au bruit, puis on corrige selon les résultats de la mesure. On suppose que la mesure est projective, c'est à dire qu'une fois effectuée, l'état est entièrement projeté dans le sous-espace mesuré. On suppose aussi qu'elle est rapide, que le système n'a pas le temps d'évoluer pendant la mesure. Finalement, on suppose qu'elle n'induit pas elle-même d'erreurs dans le système.

En étudiant l'exemple des qubits supraconducteurs, on se rend compte que la mesure sur un système quantique ne remplit pas toujours ces critères. On a vu que la mesure était bruyante, notamment parce qu'il fallait amplifier le signal. La mesure elle-même

peut induire du déphasage dans le système. Finalement, pour apprendre quelque chose, il faut mesurer sur une certaine période de temps, pendant laquelle le système a le temps d'évoluer.

Un autre obstacle à la correction concerne la nature des erreurs qui se sont produites sur le système. Par exemple, l'erreur dominante pour un qubit de type transmon est la relaxation, qui n'est pas une erreur de Pauli. On a vu que le diagnostic d'erreur consistait à déterminer l'erreur de Pauli la plus probable compte tenu du syndrome mesuré. Si ce calcul est relativement simple lorsque les erreurs sont des erreurs de Pauli, il peut devenir très complexe pour des erreurs générales.

Finalement, contrairement à ce qu'on suppose dans le formalisme des codes stabilisateurs, les systèmes utilisés pour jouer le rôle de qubits ne sont souvent pas des systèmes à deux niveaux. On a vu que les qubits supraconducteurs avaient en réalité plusieurs niveaux d'énergie, mais qu'on pouvait n'en isoler que deux pour effectuer une opération. On peut supposer qu'une erreur puisse induire des transitions vers les autres niveaux. Les processus traditionnels de correction d'erreurs ne prescrivent pas ce qu'il faut faire dans un tel cas.

Lorsqu'on tient compte de toutes ces réalités, il n'est pas évident qu'il soit avantageux de faire de la correction d'erreurs dans une architecture de qubits supraconducteurs. Si la mesure est faible et introduit elle-même du bruit dans le système, il est possible qu'elle entraîne plus d'erreurs qu'elle n'apporte d'information sur ces erreurs. Pour conserver l'état du système, il serait alors préférable de ne pas effectuer de mesures. Le problème du diagnostic d'erreurs se pose également. Lorsque la mesure est faible, continue, que les erreurs ne sont pas des erreurs de Pauli et que les systèmes ont en réalité plus de deux niveaux, il peut être laborieux de déterminer la nature de l'erreur qui s'est produite et de trouver le meilleur canal de correction.

1.4 Énoncé de l'objectif et des résultats

L'objectif principal de ce travail est d'évaluer l'utilité d'une mesure faible, continue et bruyante à corriger les erreurs. Plusieurs études ont déjà été réalisées en ce sens. En 1996, Mabuchi et Zoller ont développé une méthode de correction adaptée aux systèmes qui émettent des photons lorsqu'ils subissent une relaxation [46]. L'année suivante, Paz et Zurek ont examiné la limite où le processus de détection et de correction d'erreur se faisait de manière continue [47]. Ensuite, en 2002, Ahn. et al. ont proposé d'utiliser la mesure

continue pour effectuer un contrôle avec rétroaction afin de corriger les erreurs [48]. Cette méthode donne d'intéressants résultats, mais les imperfections de la mesure, par exemple le fait qu'elle puisse induire du déphasage, n'ont pas été considérées. Plusieurs auteurs ont poursuivi les travaux d'Ahn. et al. afin de diminuer la quantité de ressources informatiques nécessaire pour calculer la rétroaction [49–52]. En parallèle à ces études, certains auteurs se sont appliqués à adapter les méthodes de correction d'erreurs pour des architectures de qubits particulières, notamment Levy et al. [53]

Dans le cadre de ce travail, on explore la possibilité qu'une mesure faible, continue et bruyante puisse aider à mieux corriger les erreurs ou, au contraire, induise davantage d'erreurs dans le système. Pour répondre à cette question, une méthode de correction adaptée aux particularités physiques des qubits dont la mesure est faible et continue a été développée. Il s'agit d'une méthode de correction optimale qui est conditionnelle aux résultats des mesures faibles et continues du syndrome d'erreur. On l'a ensuite testée sur les qubits supraconducteurs. Grâce à des simulations numériques, on a pu déterminer que, sous certains régimes de paramètres, la mesure de parité de type dispersive effectuée sur des qubits supraconducteurs peut en principe être utilisée pour corriger des erreurs.

Chapitre 2

Méthodologie

Les étapes d'un processus de correction traditionnel sont expliquées en détail à la section 1.1.2. On peut les résumer comme suit :

1. on prépare un état dans l'espace code ;
2. on laisse le système évoluer ;
3. après un certain temps, on mesure le syndrome d'erreur ;
4. à partir du syndrome, on pose un diagnostic de l'erreur ;
5. si désiré, on corrige l'erreur¹.

À la section 1.3, on s'est rendu compte de la difficulté d'appliquer la méthode à la lettre lorsque la mesure développée pour une architecture de qubit était faible et continue. On a vu que cette difficulté ne provenait pas seulement des particularités de la mesure. La nature des erreurs dans un vrai système physique peut être beaucoup plus complexe que les exemples que nous avons illustrés. Cela complique la tâche de diagnostic d'erreurs. De plus, les qubits physiques ont souvent plus que deux niveaux, ce qui ajoute à la complexité du problème. Cela rend le diagnostic d'erreurs traditionnel laborieux, de plus, on peut se questionner de l'utilité réelle de la mesure.

Dans ce chapitre, on propose une méthode de correction d'erreurs qui tient compte de toutes ces difficultés. Le principe de la méthode est le suivant : plutôt que de laisser le système évoluer et de mesurer le syndrome par après, on effectue les mesures en continu pendant l'évolution. En mesurant le syndrome en continu, un historique des résultats est obtenu. Durant l'évolution, on met continuellement à jour notre description du bruit dans

¹Dans plusieurs applications, il n'est pas nécessaire de corriger l'erreur ; le fait de la connaître (poser un bon diagnostic) est suffisant.

le système via une simulation, au cours de laquelle on tient compte des effets de la mesure. À l'étape de correction, cette simulation permet de trouver un canal de correction qui tient compte à la fois du modèle de bruit et de l'historique des résultats des mesures effectuées. Il s'agit donc d'une méthode de correction expérimentale qui repose sur une simulation numérique permettant de tenir compte des résultats de la mesure. Cette méthode permet d'évaluer si une mesure développée pour une architecture de qubit peut en principe être utilisée pour corriger des erreurs. Elle peut, entre autres, être appliquée aux qubits supraconducteurs.

Dans le cadre de ce travail, une telle expérience n'a pas été tentée. On s'est contenté de simuler l'évolution de qubits sur lesquels on mesure le syndrome de manière continue. Les résultats des simulations ont servi à alimenter un algorithme de correction d'erreur qui évalue la performance moyenne de la correction. On a ainsi pu estimer numériquement l'efficacité de la mesure sur les qubits supraconducteurs à corriger les erreurs.

Dans la section 2.1, on montre comment effectuer la simulation pour recueillir des informations sur le canal de bruit. L'incorporation des mesures continues sera expliqué plus en détail à la section 2.2. Ensuite, à partir des informations que donne la simulation, il faut trouver un canal de correction optimal, ce qui sera expliqué dans la section 2.3. Finalement, dans la section 2.4, on montre comment il est possible de déterminer de façon expérimentale l'utilité d'une mesure à des fins de correction d'erreurs sans devoir appliquer le canal de correction optimale sur le système. Cela est important puisque les corrections optimales proposées par notre méthode pourraient ne pas être réalisées avec les technologies expérimentales actuelles.

2.1 Utilisation d'un simulateur

On a vu qu'un des obstacles à surmonter pour réaliser un protocole de correction d'erreurs concerne le diagnostic d'erreur. Pour résoudre ce problème, on propose de simuler l'évolution des qubits. Cette simulation se fait avec un outil qu'on nomme le simulateur. Pour l'instant, on peut penser que le simulateur est une boîte noire qui, si on lui donne une matrice ρ représentant l'état initial d'un système, renvoie une matrice ρ' représentant l'état de ce système après un temps t . Le simulateur permettra de caractériser l'erreur qui a affecté le système et de trouver le meilleur moyen de corriger cette erreur.

La simulation d'un état particulier n'est pas intéressante pour un protocole de cor-

rection d'erreurs. En effet, en principe, on ne connaît pas l'état dans lequel se trouve initialement le système, on sait seulement qu'il est dans l'espace code. Il faut donc s'arranger pour que le simulateur décrive l'évolution de n'importe quel état dans l'espace code. On réalise cela en utilisant une astuce mathématique. Cette astuce consiste à donner au simulateur un état initial maximalement intriqué sur l'espace code. Cet état initial peut s'écrire comme suit :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^k-1} |i\rangle_{\text{ref}} \otimes U_c |i\rangle \quad (2.1)$$

où k est le nombre de qubits encodés et U_c est une matrice représentant l'étape d'encodage qui fait passer un état de k qubits logiques à un état de n qubits physiques. Par exemple, la matrice d'encodage pour le code à trois qubits (voir section 1.1.3) est $U_c = |000\rangle\langle 0| + |111\rangle\langle 1|$. Les n qubits physiques sont donc artificiellement intriqués avec un système de référence $|i\rangle_{\text{ref}}$. Ce système n'existe pas physiquement, il est ajouté à la simulation pour pouvoir utiliser l'isomorphisme de Jamilkovski (voir l'annexe C). De ce fait, il n'évolue pas pendant la simulation. La simulation d'un état maximalement intriqué tel que montré par l'équation (2.1) permet donc de caractériser complètement l'effet du canal sur l'espace code. On évite ainsi de devoir répéter cette simulation pour différents états initiaux.

En donnant un tel état à l'entrée du simulateur, l'état en sortie aura la forme suivante :

$$\rho' = \sum_{i,j=0}^{2^k-1} |i\rangle\langle j|_{\text{ref}} \otimes \sum_l E_l U_c |i\rangle\langle j| U_c^\dagger E_l^\dagger \quad (2.2)$$

où $\{E_l\}$ sont des opérateurs de Kraus caractérisant l'évolution du système. Il sera ensuite possible de se servir de ρ' pour trouver une correction à appliquer qui maximise la probabilité de retrouver l'état initial du système, quel que soit cet état initial. On remarque que, parce qu'on a explicitement ajouté l'étape d'encodage, cette matrice obtenue en sortie du simulateur ne fournit pas toutes les informations sur le canal d'évolution, mais uniquement son effet sur les mots-codes. Le fait d'ajouter l'étape d'encodage U_c permet donc de ne pas s'encombrer d'informations inutiles, et ainsi simplifier la simulation.

2.2 Incorporer les mesures

Dans la section 1.1.2 expliquant les codes stabilisateurs, on a vu que le fait de mesurer les stabilisateurs permet de savoir vers quel sous-espace l'état du système a évolué et corriger en conséquence. Cependant, dans le formalisme habituel des codes stabilisateurs, les mesures sont discrètes et projectives, et sont effectuées à la fin du processus. Les mesures effectuées sur des qubits supraconducteurs et d'autres architectures sont plutôt faibles et continues. Pour de tels qubits, on propose donc d'effectuer ces mesures en continu pendant que le système évolue sous l'effet du bruit.

Dans la section 2.1, on explique comment obtenir des informations au sujet des effets du bruit sur le système via une simulation. Avec déjà une connaissance des effets du bruit, on peut se questionner sur l'utilité d'effectuer en plus des mesures qui peuvent introduire davantage de bruit. La subtilité est que, comme on l'a vu dans la section 1.1.1, l'état d'un système exposé au bruit peut devenir mixte. Un état mixte signifie une incertitude : un mélange statistique d'états purs. L'ajout des mesures continues du syndrome permet de mieux caractériser l'évolution du système et d'enlever partiellement ces incertitudes. Ainsi, il se peut qu'il soit possible de mieux corriger le système par la suite : c'est ce qu'on tentera de déterminer au prochain chapitre pour une architecture de qubits particulière.

On peut se convaincre de ce fait par un exemple. À la section 1.1.3, on montre que le code à trois qubits corrige une erreur d'inversion sur un qubit. Si deux inversions se produisent sur deux différents qubits, le processus de correction échouera. En effet, la correction prescrit d'inverser le qubit qui est différent des deux autres ; l'effet combiné des erreurs et de la correction a donc pour effet d'inverser les deux états de base logiques $|000\rangle$ et $|111\rangle$. En effectuant les mesures de parité à des intervalles réguliers, les chances que deux inversions se produisent durant un intervalle diminuent avec la durée de cet intervalle. L'ensemble des résultats des mesures obtenus à chaque intervalle permet de corriger adéquatement si au maximum une seule inversion se produit entre chaque intervalle. Donc, les chances que le processus de correction soit un succès augmentent si on mesure le syndrome plus souvent. Cet effet est illustré à la figure 2.1.

Dans cet exemple, une connaissance des effets du bruit indique que ce dernier peut causer des erreurs d'inversion sur des qubits et que ces événements se produisent avec une certaine probabilité au cours de la période de temps étudiée. On peut se servir de ces informations pour trouver une correction qui diminue la probabilité d'erreur. Cependant, le fait qu'il y ait eu ou non une inversion sur un qubit est un processus stochastique. Si

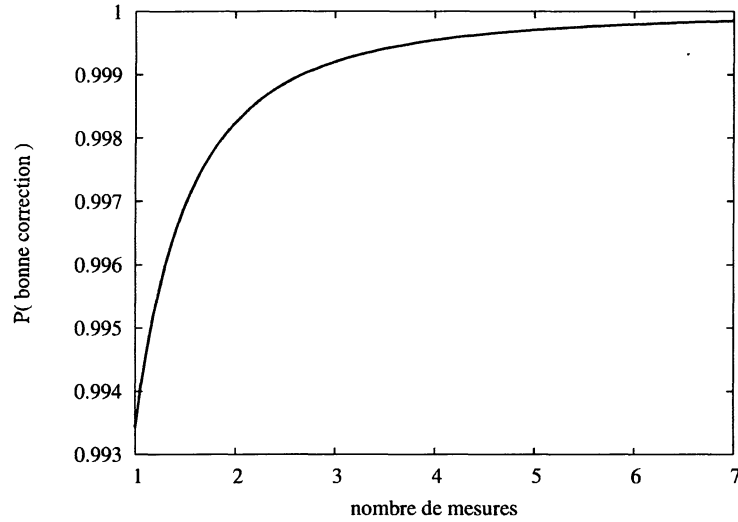


FIGURE 2.1 – Probabilité d’une bonne correction en fonction du nombre de mesures prises dans un intervalle de temps donné, en utilisant le code à trois qubits. La probabilité d’une erreur d’inversion sur un qubit entre chaque mesure est prise comme $0.5(1 - \text{Exp}(-pt/n))$ où p est le taux d’erreur d’inversion, t est le temps écoulé et n est le nombre de mesures effectuée. On a fixé $pt = 0.1$.

mesurer le syndrome permet parfois de détecter que de tels processus se sont produits, mesurer le syndrome continuellement donne davantage d’informations sur ce qui s’est réellement produit dans le système.

Bien qu’une mesure fréquente du syndrome semble aider à la correction d’erreur lorsque cette mesure est projective, ce n’est pas nécessairement le cas si la mesure est faible et induit elle-même du bruit dans le système. L’intérêt principal de mon travail est justement d’évaluer si la mesure peut aider à corriger les erreurs. Nous ferons cela en comparant la performance de la méthode si les mesures sont incluses ou si elles ne le sont pas.

D’un point de vue pratique, les effets de la mesure doivent être inclus dans la simulation. En effet, la mesure induit en général du bruit, ce dont il faut tenir compte. Plus important, en raison du postulat de la mesure en mécanique quantique (qui traite de la réduction du paquet d’onde), l’évolution du système est conditionnelle à l’ensemble des résultats des mesures.

Ce dernier fait implique qu’il faut pouvoir donner les résultats des mesures au simulateur. Par exemple, la simulation pourrait être faite en même temps que l’expérience : des mesures sont effectuées sur le système dans le laboratoire, les résultats sont envoyés

au simulateur et ce dernier actualise la matrice densité qu'il fait évoluer.

En incluant les effets de la mesure dans la simulation, celle-ci produira une matrice densité qui combine les connaissances sur l'effet du bruit et celles ajoutées par les résultats des mesures. Un canal de correction optimal à appliquer au système peut être trouvé à partir de cette matrice. Cette correction serait envoyée à un système de contrôle qui l'appliquerait au système en temps réel. Comme ce type de correction pourrait s'avérer irréalisable avec les technologies actuelles, nous discuterons plus loin d'une façon d'évaluer expérimentalement la qualité d'une mesure dans un contexte de correction d'erreurs.

2.3 Correction optimale

On a vu à la section 2.1 qu'on se sert d'un simulateur pour caractériser le canal d'évolution à travers lequel passe le système. Dans la section 2.2, on explique que ce canal dépend des résultats des mesures prises sur le système. Dans cette section, on montre comment se servir de cette information pour déterminer la meilleure correction à appliquer pour inverser cette évolution. Autrement dit, on se sert de la matrice densité en sortie du simulateur pour déterminer les opérations à appliquer au système afin de le corriger le mieux possible.

On rappelle que la matrice densité en sortie du simulateur aura la forme suivante (voir section 2.1) :

$$\rho' = \sum_{i,j=0}^{2^k-1} |i\rangle\langle j|_{\text{ref}} \otimes \sum_l E_l U_c |i\rangle\langle j| U_c^\dagger E_l^\dagger \quad (2.3)$$

où U_c décrit une étape d'encodage qui associe un état à k qubits à un mot code de n qubits et où les opérateurs E_l décrivent l'évolution du système en fonction du temps. Ces opérateurs sont conditionnels aux résultats des mesures qu'on prend sur le système. Une fois la correction appliquée sur cet état, on peut, par la même façon, écrire l'état corrigé comme suit :

$$\rho_{\text{corr}} = \sum_{i,j=0}^{2^k-1} |i\rangle\langle j|_{\text{ref}} \otimes \sum_{l,m} U_c^\dagger R_m E_l U_c |i\rangle\langle j| U_c^\dagger E_l^\dagger R_m^\dagger U_c \quad (2.4)$$

où les opérateurs R_l décrivent le canal de correction. Une étape de décodage U_c^\dagger qui est l'opération inverse de l'encodage est ajoutée de sorte que la matrice ρ_{corr} soit de dimension

2^k . En effet, même si physiquement, l'état corrigé reste un état à n qubits, on l'encode comme un état à k qubits. Comme on sait que l'état se trouve initialement dans l'espace code, on sait que la correction n'est pas adéquate si elle ne ramène pas de nouveau le système dans l'espace code. L'état corrigé doit donc obligatoirement se trouver dans l'espace code, qui est un espace de taille 2^k . Tout comme l'étape d'encodage permet de ne pas s'encombrer d'informations inutiles dans la description du canal de correction (voir section 2.1), l'étape de décodage rend la description du canal de correction plus compacte. En fait, pour simplifier la notation, on peut tout simplement écrire l'état corrigé comme suit :

$$\rho_{\text{corr}} = \sum_{i,j=0}^{2^k-1} |i\rangle\langle j|_{\text{ref}} \otimes \sum_{l,m} R_m E_l |i\rangle\langle j| E_l^\dagger R_m^\dagger \quad (2.5)$$

où cette fois, les opérations d'encodage et de décodage sont absorbées respectivement dans la description des canaux d'évolution et de correction. Autrement dit :

$$E_l U \rightarrow E_l \quad (2.6)$$

$$U^\dagger R_m \rightarrow R_m \quad (2.7)$$

Certaines conditions s'appliquent sur le canal de correction : il doit être complètement positif et préserver la trace de toute matrice sur laquelle il s'applique. Cette dernière condition se traduit mathématiquement par la relation suivante :

$$\sum_m R_m^\dagger R_m = I \quad (2.8)$$

Physiquement, ces conditions signifient que la correction à appliquer est belle et bien quelque chose qui, en principe, pourra être réalisé dans un processus de correction d'erreur. Par exemple, une correction qui prescrit d'ignorer l'état final du système et de reconstruire l'état initial ne satisfait pas aux conditions. Une telle correction serait idéale mais suppose la connaissance de l'état initial du système, ce qui n'est justement pas le cas lorsqu'on veut faire de la correction d'erreurs.

On définit le meilleur canal de correction comme étant celui qui maximise la quantité :

$$F = \langle \psi | \rho_{\text{corr}} | \psi \rangle = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \rho_{\text{corr}}) \quad (2.9)$$

où ρ_{corr} est l'état en sortie du simulateur ayant passé à travers le canal de correction et le décodage, et $|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^k-1} |i\rangle \otimes |i\rangle$, soit l'état qui doit être donné en entrée du simulateur mais sans l'étape d'encodage. F représente donc la fidélité entre ces deux états. La fidélité est une mesure de la ressemblance entre deux états : elle égale 1 lorsque les états sont identiques et 0 lorsque les états sont orthogonaux.

La fidélité F telle que décrite à l'équation (2.9) représente une fidélité moyennée sur tous les états initiaux possibles qui ont subi le même canal d'évolution [54]. En effet, dans la section 2.1, on a utilisé une astuce mathématique pour éviter de devoir reprendre les simulations pour différents états initiaux. Cette astuce consistait à envoyer un état maximalement intriqué avec l'espace code dans le simulateur ; la simulation permettait alors de pouvoir décrire l'effet du canal d'évolution sur tous les mots codes. Cette même astuce peut être utilisée pour décrire l'effet du canal d'évolution combiné au canal de correction pour tous les états initiaux possibles. Le calcul de la fidélité sur de tels états donne donc une fidélité moyennée sur les différents états initiaux possibles.

Le problème d'optimiser la fidélité F peut être écrit sous forme d'un problème de programmation semi-définie, pour lequel plusieurs algorithmes existent déjà [55]. En effet, par cyclicité et linéarité de la trace, on a :

$$F = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\rho_{\text{corr}}) \quad (2.10)$$

$$= \text{Tr} \left(|\psi\rangle\langle\psi| \sum_{i,j=0}^{2^k-1} |i\rangle\langle j|_{\text{ref}} \otimes \sum_{l,m} R_m E_l |i\rangle\langle j| E_l^\dagger R_m^\dagger \right) \quad (2.11)$$

$$= \text{Tr} \left(\left[\sum_{i,j=0}^{2^k-1} |i\rangle\langle j| \otimes \sum_m R_m^\dagger |i\rangle\langle j| R_m \right] \left[\sum_{i,j=0}^{2^k-1} |i\rangle\langle j| \otimes \sum_l E_l |i\rangle\langle j| E_l^\dagger \right] \right) \quad (2.12)$$

$$\equiv \text{Tr}(X\rho') \quad (2.13)$$

où ρ' est la matrice en sortie du simulateur et X est une matrice associée au canal de correction. Le problème d'optimisation exprimé sous forme d'un problème semi-défini est alors :

$$F_{\text{opt}} = \arg \max_X \text{Tr}(X\rho') \quad (2.14)$$

sujet à :

$$X \geq 0 \quad (2.15)$$

$$\text{Tr}_{\text{ref}} X = I \quad (2.16)$$

Les conditions (2.15) et (2.16) sur la matrice X sont équivalentes à dire qu'il faut que le canal de correction soit complètement positif et qu'il préserve la trace. En solutionnant ce problème grâce à un algorithme de programmation semi-définie, on obtient une matrice X qui prescrit les opérations à effectuer sur le système pour le corriger. On obtient aussi une fidélité F_{opt} qui représente une estimation numérique de la performance de la correction pour un canal d'évolution donné. La fidélité calculée expérimentalement pourrait être inférieure. En effet, le canal de correction trouvé par l'algorithme est optimal pour le modèle de bruit utilisé dans la simulation. Un désaccord entre ce modèle et le système physique entraîne forcément une perte d'optimalité.

2.4 Évaluation de la méthode

Pour déterminer expérimentalement si une mesure peut en principe aider à corriger les erreurs, on compare la performance de la correction dans le cas où les mesures du syndrome sont incorporées dans le protocole et dans le cas où elles ne sont pas incorporées. Comme mesure de performance, on calcule la fidélité de l'état corrigé ρ_{corr} par rapport à l'état initial $|\psi_i\rangle$. Il faut ensuite calculer la moyenne de cette fidélité pour différents résultats de mesures (notés par l'indice j) et pour différents états initiaux. Cette fidélité moyenne peut s'écrire comme suit :

$$\bar{F} = \sum_{ij} F(i, j) \quad (2.17)$$

$$= \sum_{ij} \langle \psi_i | \rho_{\text{corr}}^{ij} | \psi_i \rangle \quad (2.18)$$

$$= \sum_i \langle \psi_i | \bar{\rho}_{\text{corr}}^i | \psi_i \rangle \quad (2.19)$$

où $\bar{\rho}_{\text{corr}}^i$ est la matrice corrigée moyenne si l'état initial du système était $|\psi_i\rangle$. On peut écrire la fidélité moyenne sous cette forme puisqu'elle dépend linéairement de $\bar{\rho}_{\text{corr}}$. Numé-

riquement, on n'a pas besoin de calculer la moyenne sur plusieurs états initiaux puisqu'on utilise une astuce mathématique impliquant l'isomorphisme de Jamilkovski tel qu'expliqué dans la section 2.1. On calcule la moyenne sur plusieurs trajectoires de la fidélité obtenue grâce à l'algorithme de programmation semi-définie. C'est ce genre de résultat qu'on analysera au chapitre 3.

Pour mesurer cette fidélité expérimentalement, on propose d'effectuer une tomographie de $\bar{\rho}_{\text{corr}}$. La tomographie consiste à déterminer l'état d'un système en effectuant des mesures sur plusieurs copies à partir d'un ensemble complet d'observables. Il s'agit de la méthode utilisée habituellement pour tester l'efficacité d'une méthode de correction d'erreurs [56]. Cette méthode a également été utilisée pour caractériser le bruit dans un système quantique [57, 58]. Cependant, il ne s'agit pas de la seule méthode [59].

Dans les paragraphes qui suivent, on montre comment effectuer la tomographie de l'état corrigé du système. Dans la section 2.4.1, on explique comment effectuer la tomographie d'un état en utilisant la règle de Bayes. Dans la section 2.4.2, on explique comment faire pour effectuer la tomographie de l'état corrigé $\bar{\rho}_{\text{corr}}$ sans appliquer le canal de correction.

2.4.1 Tomographie de Bayes

Le but d'un processus de tomographie est de pouvoir déterminer la matrice densité d'un état quantique inconnu. Pour ce faire, on effectue des mesures sur plusieurs copies de cet état. Dans le cas étudié ici, l'état corrigé ρ_{corr} varie selon le résultat des mesures du syndrome. La tomographie ne permet donc que d'écrire l'état corrigé moyen $\bar{\rho}_{\text{corr}}$. On pourra ensuite calculer sa fidélité à l'état initial et ainsi évaluer l'efficacité d'une mesure à corriger les erreurs.

La méthode de tomographie proposée pour ce genre d'expérience est la tomographie de Bayes. Cette méthode est itérative, elle consiste à suivre les étapes suivantes :

1. On commence par déterminer une distribution de probabilité sur des matrices densité $P(\rho)$. Cette distribution de probabilité est la connaissance qu'on a du système à priori. Elle doit respecter la relation suivante :

$$\int P(\rho) d\rho = 1 \quad (2.20)$$

2. On effectue une mesure d'une observable O_i . Le résultat de la mesure, qu'on note α_j , indique que l'état s'est effondré dans $P_i^{\alpha_j}$. La probabilité d'obtenir α_j lors d'une

mesure de O_i sur un état ρ est :

$$P(\alpha_j) = \text{Tr}(\rho P_i^{\alpha_j}) \quad (2.21)$$

3. Le résultat de la mesure donne des informations supplémentaires sur la matrice densité. On met donc à jour la distribution de probabilité conditionnellement au résultat obtenu, et ce, selon la règle de Bayes :

$$P(\rho) \rightarrow P(\rho|P_i^{\alpha_j}) = \frac{P(\rho)\text{Tr}(\rho P_i^{\alpha_j})}{\int \text{Tr}(\rho P_i^{\alpha_j})P(\rho)d\rho} \quad (2.22)$$

4. On revient à l'étape 1, cette fois, avec la nouvelle distribution de probabilité $P(\rho|P_i^{\alpha_j})$.

Après un certain nombre d'itérations, si on a commencé par une distribution de probabilité raisonnable, la distribution de probabilité des matrices densité devrait être bien piquée. Plus précisément, l'incertitude sur une matrice densité devrait diminuer comme la racine carrée du nombre de mesure.

Pour réaliser la tomographie de Bayes, les $P_i^{\alpha_j}$ introduits à l'équation (2.21) doivent être des opérateurs de mesure à valeur positive (POVM), c'est à dire qu'il doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$P_i^{\alpha_j} \geq 0 \quad (2.23)$$

$$\sum_j P_i^{\alpha_j} = I \quad (2.24)$$

Respecter la relation (2.23) signifie que la probabilité de mesurer $P_i^{\alpha_j}$ sur ρ sera positive quel que soit ρ . L'équation (2.24) signifie que la somme des probabilités d'obtenir les différents résultats lorsqu'on mesure O_i donne 1. Un cas particulier est la mesure projective, laquelle satisfait, en plus des conditions (2.23) et (2.24), la relation suivante :

$$P_i^{\alpha_j} P_i^{\alpha_{j'}} = \delta_{j,j'} P_i^{\alpha_j} \quad (2.25)$$

En général, une mesure sur un système ne sera pas une mesure projective et donc ne satisfera pas la condition (2.25). On a discuté de ce fait dans le cas des mesures utilisées pour la correction d'erreurs. Les conditions (2.23) et (2.24) sont cependant satisfaites en

général, il est donc possible d'effectuer la tomographie d'un état à l'aide d'un ensemble de mesures faibles.

2.4.2 Tomographie de l'état corrigé

Même si, à travers la condition (2.8), on s'assure que le canal de correction est réalisable en principe, il se peut qu'en pratique, les opérations requises pour l'appliquer ne puissent pas être effectuées avec les technologies existantes. De plus, pour trouver la correction optimale à appliquer au système, la méthode de correction demande de simuler le système en temps réel. Encore une fois, cela pourrait ne pas être réalisable avec les technologies existantes. Dans cette section, on montre comment effectuer de façon indirecte une tomographie de l'état corrigé moyen sans devoir appliquer le canal de correction sur le système. Cela nous permet d'évaluer expérimentalement l'efficacité d'une mesure à corriger les erreurs malgré les limites mentionnées plus haut.

On propose d'effectuer la tomographie de $\bar{\rho}_{\text{corr}}$ à partir de mesures prises sur ρ' , soit l'état avant la correction. Cependant, on ne peut pas trouver $\bar{\rho}_{\text{corr}}$, en effectuant une tomographie de l'état avant correction moyen $\bar{\rho}'$, puis en appliquant un canal de correction moyen. Autrement dit, on doit tenir compte de l'inégalité suivante :

$$\bar{\rho}_{\text{corr}} \neq \sum_j \bar{R}_j \bar{\rho}' \bar{R}_j^\dagger \quad (2.26)$$

où $\bar{\rho}'$ est la matrice densité moyenne du système après évolution dû au bruit et aux mesures, et les \bar{R}_j sont les opérateurs de Kraus d'un canal de correction moyen. Ces opérateurs de correction moyen pourraient être trouvés en calculant la moyenne des matrices X que donne l'algorithme de programmation semi-définie, voir équation (2.14). On pourrait aussi trouver cette correction moyenne en effectuant l'algorithme avec $\bar{\rho}'$. D'une manière ou d'une autre, cela ne permet pas de déterminer $\bar{\rho}_{\text{corr}}$. On peut expliquer cette inégalité par le fait qu'on effectue des mesures sur le système pendant son évolution. Ces mesures apportent des informations sur l'erreur qui a affecté le système durant son évolution et permettent ainsi de mieux corriger cette erreur. En moyennant avant d'effectuer la correction, on perd cette information. Mathématiquement, cette inégalité s'explique par le fait que le canal de correction ne dépend pas linéairement de ρ' .

Il faut donc s'y prendre autrement pour effectuer la tomographie de $\bar{\rho}_{\text{corr}}$. On rappelle que, selon le postulat de la mesure en mécanique quantique, mesurer une observable O_i

sur ρ' projette cet état dans $P_i^{\alpha_j}$ si le résultat de cette mesure est α_j . La probabilité d'avoir le résultat α_j en mesurant O_i , donc, mesurer $P_i^{\alpha_j}$, est :

$$P(\alpha_j) = \text{Tr}(\rho' P_i^{\alpha_j}) \quad (2.27)$$

On rappelle aussi que la relation entre ρ' et ρ_{corr} est :

$$\rho_{\text{corr}} = \sum_m R_m \rho' R_m^\dagger \quad (2.28)$$

où les R_m sont les opérateurs de Kraus décrivant le canal de correction optimal qu'il faut appliquer ; ils sont déterminés à partir de ce que donne le simulateur en sortie. On peut montrer que la probabilité de mesurer $P_i^{\alpha_j}$ sur ρ' est égale à la probabilité de mesurer $P_i'^{\alpha_j}$ sur ρ_{corr} . En effet, on a :

$$P(\alpha_j) = \text{Tr}(\rho' P_i^{\alpha_j}) \quad (2.29)$$

$$= \text{Tr}(\rho' \sum_m R_m^\dagger P_i'^{\alpha_j} R_m) \quad (2.30)$$

$$= \text{Tr}(\sum_m R_m \rho' R_m^\dagger P_i'^{\alpha_j}) \quad (2.31)$$

$$= \text{Tr}(\rho_{\text{corr}} P_i'^{\alpha_j}) \quad (2.32)$$

où on définit $P_i'^{\alpha_j}$ par la relation $P_i^{\alpha_j} = \sum_m R_m^\dagger P_i'^{\alpha_j} R_m$. En utilisant le formalisme des superopérateurs (voir annexe B), on peut trouver $P_i'^{\alpha_j}$ en fonction de $P_i^{\alpha_j}$. En effet, on a que :

$$P_i^{\alpha_j} = \sum_m R_m^\dagger P_i'^{\alpha_j} R_m \quad (2.33)$$

$$|P_i^{\alpha_j}\rangle\rangle = \sum_m R_m^* \otimes R_m |P_i'^{\alpha_j}\rangle\rangle \quad (2.34)$$

$$|P_i^{\alpha_j}\rangle\rangle = S |P_i'^{\alpha_j}\rangle\rangle \quad (2.35)$$

$$S^{-1} |P_i^{\alpha_j}\rangle\rangle = |P_i'^{\alpha_j}\rangle\rangle \quad (2.36)$$

où on a défini le superopérateur $S = \sum_m R_m^* \otimes R_m$. Cette matrice n'est pas inversible

puisque le canal de correction ramène un état à n qubits dans l'espace code, qui est un état à k qubits. S^{-1} est donc l'inverse sur le support de la matrice S , qu'on nomme habituellement le pseudo-inverse.

L'équation (2.36) montre qu'il est possible d'associer une mesure de $P_i^{\alpha_j}$ sur ρ' à une mesure de $P_i'^{\alpha_j}$ sur ρ_{corr} . Pour pouvoir effectuer la tomographie de Bayes de l'état corrigé ρ_{corr} à partir de mesures prises sur ρ' , il faut que les $P_i'^{\alpha_j}$ soient des POVM, c'est-à-dire qu'ils doivent satisfaire les conditions (2.23) et (2.24) présentées à la section 2.4.1. Ces conditions signifient que la probabilité d'obtenir le résultat de mesure α_j est toujours positive, quelle que soit la matrice sur laquelle on effectue la mesure. Elles signifient également que la somme des probabilités de mesurer les différents α_j est égale à un. Une mesure directe sur un système respecte toujours ces conditions. Cependant, dans le cas présent, les mesures sur l'état corrigé ρ_{corr} sont indirectes.

On peut montrer que les $P_i'^{\alpha_j}$ sont des POVM lorsque le canal de correction est surjectif. Une application est surjective lorsqu'elle permet de relier chaque élément d'un ensemble d'arrivée à au moins un élément de l'ensemble de départ. Le canal de correction est donc surjectif si on peut obtenir l'ensemble des états corrigés ρ_{corr} en l'appliquant sur l'ensemble des états ρ' . On rappelle que :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho_{\text{corr}} P_i'^{\alpha_j}) &= \text{Tr}\left(\sum_m R_m \rho' R_m^\dagger P_i'^{\alpha_j}\right) \\ &= \text{Tr}(\rho' P_i^{\alpha_j}) \\ &= P(\alpha_j) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.37}$$

L'équation 2.37 indique que la probabilité de mesurer indirectement $P_i'^{\alpha_j}$ sur l'état corrigé ρ_{corr} est positive. Pour que cette mesure soit un POVM, il faut que cette probabilité soit positive quel que soit l'état ρ_{corr} concerné par la mesure. La mesure étant en réalité faite sur l'état avant correction ρ' , la probabilité d'obtenir un certain résultat de mesure reste positive quel que soit cet état avant correction. Comme on obtient l'état corrigé ρ_{corr} en appliquant le canal de correction sur l'état avant correction ρ' , la condition de positivité (2.23) est respectée si ce canal permet d'obtenir tous les ρ_{corr} à partir des ρ' . Autrement dit, la condition de positivité pour les $P_i'^{\alpha_j}$ est respectée si le canal de correction est surjectif. Par un argument similaire pour la condition concernant la somme des probabilités (2.24), on peut conclure que les $P_i'^{\alpha_j}$ sont des POVM si le canal de correction est surjectif. Ainsi, lorsque le canal de correction est surjectif, il est possible

d'effectuer une tomographie de Bayes sur l'état corrigé moyen à partir de mesures prises sur l'état avant correction.

En général, un canal n'est pas surjectif. Par exemple, le canal complètement dépolarisant, qui a pour effet de transformer une matrice densité quelconque en matrice identité, n'est pas surjectif. En effet, en appliquant ce canal à l'ensemble des matrices densité, on n'obtient qu'un seul élément d'arrivée : la matrice identité. Cependant, on peut se convaincre que dans la plupart des cas, le canal de correction optimal que prescrit l'algorithme de programmation semi-définie le sera. En effet, les canaux qui ne sont pas surjectifs comme le canal complètement dépolarisant sont associés à une perte d'information et ne constituent pas une bonne correction à appliquer au système. Par exemple, un canal de correction permettant de renverser complètement l'erreur qui a affecté le système est surjectif. En effet, dans un tel cas, appliquer la correction permet de retrouver l'état initial du système, quel que soit cet état initial.

Il peut arriver, dans certains cas particuliers, qu'il existe plusieurs canaux de correction optimale. Par exemple, lorsqu'on mesure qu'un qubit a relaxé dans son état fondamental $|0\rangle$, la correction optimale prescrit de remettre ce qubit dans l'état excité $|1\rangle$. En effet, si on mesure qu'une relaxation s'est produite, la probabilité que le qubit était initialement dans l'état $|1\rangle$ est supérieure à la probabilité qu'il était dans une superposition de $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Cependant, une telle correction n'est bien définie que si le qubit affecté de l'erreur est dans l'état $|0\rangle$, elle ne prescrit pas ce qu'il faut faire lorsque le qubit est dans l'état $|1\rangle$. En effet, lorsqu'une relaxation est mesurée sur un qubit, ce dernier se trouve toujours dans l'état $|0\rangle$ après la mesure. Il existe donc plusieurs canaux de correction optimaux à appliquer au système. Ainsi, il est possible d'en sélectionner un qui soit surjectif. Comme les mesures prises sur le système sont faibles, il est raisonnable de penser que ce genre de situation ne se produira pas en pratique.

Chapitre 3

Application de la méthode et résultats

Au chapitre précédent, un protocole expérimental de correction d'erreurs évaluant l'efficacité d'une mesure faible et continue pour corriger les erreurs a été exposé. Dans le cadre de ce travail, une telle expérience n'a pas encore été tentée ; on s'est contenté d'effectuer des simulations numériques tel qu'expliqué à la section 2.1. La performance de la mesure est ensuite évaluée à partir de la fidélité obtenue en appliquant l'algorithme de correction présenté à la section 2.3. Dans ce chapitre, on présente les résultats obtenus lorsqu'on applique cette méthode au cas particulier des qubits supraconducteurs.

On a vu au chapitre 1 que la mesure de parité développée par Lalumière et al. [28, 44] pour les qubits supraconducteurs est utilisée dans les codes à trois et à quatre qubits. On évalue maintenant l'efficacité de cette mesure à diagnostiquer les erreurs. Les détails des simulations numériques effectuées dans ce but seront d'abord énoncés dans la section 3.1, puis, des résultats évaluant numériquement l'efficacité de la mesure de parité à corriger les erreurs en fonction de différents paramètres expérimentaux seront présentés dans la section 3.2.

3.1 Méthodes numériques

Dans la section 2.1, on explique qu'il faut utiliser un simulateur pour caractériser l'erreur qui a affecté le système. Ce simulateur était une boîte noire qui prenait un état initial ρ en entrée et renvoyait cet état au temps t , ρ' . On précise maintenant comment ce simulateur fonctionne dans le cas des qubits supraconducteurs.

On a vu que l'évolution d'un système exposé à un environnement bruyant peut être décrit par une équation maîtresse (voir section 1.1.1). En lui spécifiant cette équation

maîtresse, le simulateur fait évoluer le système en utilisant un schéma d'intégration numérique. Le schéma utilisé par notre simulateur est tiré du chapitre 15 du livre de Kloeden et de Platen (voir la référence [60]). Les simulations ont été réalisées grâce au Sherbrooke QUantum pACKage (SQUACK)¹, une librairie en langage C++ développée par Maxime Boissonneault et Steve Allen. Dans les paragraphes qui suivent, on montre les équations maîtresses gouvernant l'évolution des qubits lorsqu'on réalise les codes à trois et à quatre qubits.

3.1.1 Équation maîtresse pour le code à trois qubits

Dans cette section, on construit l'équation qui permet de simuler l'évolution de qubits supraconducteurs sur lesquels on effectue le code à trois qubits. Pour prédire l'évolution des qubits dans un tel contexte, il faut d'abord connaître les particularités du système.

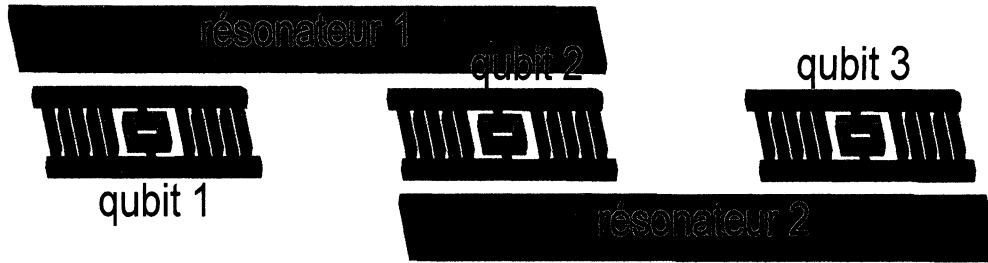


FIGURE 3.1 – Montage possible pour réaliser le code à 3 qubits sur des qubits supraconducteurs. Seul le conducteur central des résonateurs est illustré. Une façon plus réaliste de réaliser ce code est de placer les résonateurs de façon perpendiculaire. On peut alors placer le second qubit de manière à ce qu'il soit couplé aux deux résonateurs.

On a vu que les mesures requises pour réaliser le code à trois qubits sont une mesure de parité des deux premiers qubits ($\sigma_z^1 \otimes \sigma_z^2$) et une mesure de parité des deux derniers qubits ($\sigma_z^2 \otimes \sigma_z^3$). Pour effectuer de telles mesures sur des qubits supraconducteurs, il faut coupler les deux premiers qubits à un premier résonateur et les deux derniers qubits à un second résonateur. La figure 3.1 illustre une façon de réaliser de tels couplages.

Pour simplifier le modèle et augmenter la rapidité des simulations, on effectue plusieurs transformations et approximations. Bien que le second qubit doit être couplé aux deux résonateurs, on suppose que le couplage entre ces deux résonateurs est négligeable.

¹<http://www.physique.usherbrooke.ca/~mboisson/SQUACKDoc/index.html>

En effet, il semble réaliste qu'un couplage direct entre ces deux résonateurs puisse être évité en choisissant judicieusement l'architecture du système. On néglige également le couplage virtuel entre les deux résonateurs en supposant que ceux-ci n'ont pas la même fréquence de résonance. On applique l'approximation séculaire qui consiste à enlever les termes du hamiltonien qui ne conservent pas le nombre total d'excitations. On a vu que, pour que la mesure ne détruise pas l'état des qubits, il faut se placer dans le régime dispersif où la différence entre la fréquence des qubits et du résonateur est grande comparé à leur couplage. Aussi, on effectue une transformation dispersive, laquelle est une bonne approximation dans ce régime. Pour réduire la taille de la simulation, on effectue également la transformation du polaron. Cette transformation permet d'enlever les degrés de liberté associés aux résonateurs dans l'équation maîtresse. Ainsi, on ne simule que l'évolution des qubits et non celle du système comprenant les qubits et les résonateurs. La transformation du polaron est effectuée en détail en [28]. Si cette transformation est exacte dans le cas où un seul qubit est couplé au résonateur, elle constitue une approximation valide dans le cas à plusieurs qubits lorsque leur taux de relaxation est beaucoup plus petit que celui des résonateurs. Toutes ces approximations sont en bon accord avec les expériences [16, 42, 61].

On a vu à la section 1.2 que les qubits supraconducteurs sont sujets à la relaxation et au déphasage. Cependant, on a aussi constaté que le code à trois qubits ne corrige que les erreurs d'inversions (voir section 1.1.3). Ainsi, pour étudier le code à trois qubits, on suppose que le couplage des qubits avec un environnement cause des erreurs d'inversion et qu'il ne se produit aucune relaxation et aucun déphasage. Ce premier exemple ne constitue pas un scénario expérimental réaliste, il s'agit plutôt d'un cas simple avec lequel nous avons développé notre méthode. Un scénario plus réaliste sera étudié par la suite.

L'équation maîtresse gouvernant l'évolution du système sous ces différentes approximations prend la forme suivante [28, 44] :

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] - i \sum_j \Pi_{\alpha_j} \left[\sum_{ij} \chi_{ij} \sigma_z^i, \rho \right] \Pi_{\alpha_j}^* + \sum_i \frac{\gamma_{xi}}{2} D[\sigma_x^i] \rho + \sum_j \sqrt{\kappa_j \eta_j} \xi_j(t) \mathcal{H}[\Pi_{\alpha_j} e^{-i\phi_j}] \rho \quad (3.1)$$

où χ_{ij} est un déplacement en fréquence du résonateur j dû à son couplage au qubit i ,

γ_{xi} est le taux d'inversion du qubit i , κ_j est le taux de relaxation du résonateur j , η_j est l'efficacité de la mesure, ϵ_j est l'amplitude de l'excitation et ϕ_j est la phase de l'oscillateur local pour effectuer une mesure homodyne. On a également que :

$$\Pi_{\alpha_j} = \sum_j \alpha_j \Pi_{\sigma_j} \quad (3.2)$$

où α_j est l'amplitude de l'état cohérent dans le résonateur j et $\Pi_{\sigma_j} = |\sigma_j\rangle\langle\sigma_j|$, où σ_j est l'état des deux qubits couplés à ce résonateur.

Le premier terme de cette équation maîtresse (3.1) est une évolution due à l'hamiltonien des qubits. Cet hamiltonien, dans le référentiel tournant des qubits, s'écrit comme suit :

$$H = \frac{g_{11}g_{21}}{2} \left(\frac{1}{\omega_{a1} - \omega_{r1}} + \frac{1}{\omega_{a2} - \omega_{r1}} \right) (\sigma_+^1 \sigma_-^2 + \sigma_-^1 \sigma_+^2) \\ + \frac{g_{22}g_{32}}{2} \left(\frac{1}{\omega_{a2} - \omega_{r2}} + \frac{1}{\omega_{a3} - \omega_{r2}} \right) (\sigma_+^2 \sigma_-^3 + \sigma_-^2 \sigma_+^3) \quad (3.3)$$

où ω_{ai} est la fréquence du qubit i , ω_{rj} est la fréquence du résonateur j et g_{ij} est le couplage entre le résonateur j et le qubit i . Cet hamiltonien contient les énergies des trois qubits et les couplages virtuels entre deux qubits couplés à un même résonateur, mieux connus sous le nom de couplages J .

Le second terme de l'équation (3.1) contient un déphasage induit par la mesure et un déplacement de la fréquence des qubits dû à l'excitation électromagnétique envoyée au résonateur. Le troisième terme est le terme de dissipation qui modélise les erreurs d'inversion dans le système et le quatrième est le terme de mesure. Le développement de l'équation (3.1) est présenté à l'annexe D.

3.1.2 Équation maîtresse pour le code à quatre qubits

Dans cette section, on construit l'équation maîtresse pertinente pour le code à quatre qubits réalisé sur des qubits supraconducteurs. On a vu que mesurer le syndrome du code à quatre qubits consiste à mesurer la parité du premier et du deuxième qubit, ainsi que la parité du troisième et du quatrième qubit. Pour ce faire, il faut coupler les deux premiers qubits à un premier résonateur et les deux derniers qubits à un second résonateur.

L'équation maîtresse du système est très similaire à celle qui a été trouvée pour le code à trois qubits. La différence dont il faut tenir compte est qu'il y a maintenant quatre qubits dans le système et que chacun d'eux n'est couplé qu'à un seul résonateur. Aussi, dans le cas du code à trois qubits, on a supposé que le bruit cause des erreurs d'inversion dans le système. Puisque le code à 4 qubits est efficace contre la relaxation, on peut maintenant tenir compte d'un bruit plus réaliste. Pour les qubits supraconducteurs, le bruit cause normalement de la relaxation et du déphasage. On modélise ces effets par les dissipateurs suivants :

$$\gamma_{1i} D[\sigma_-^i] \quad (3.4)$$

$$\frac{\gamma_{\varphi i}}{2} D[\sigma_z^i] \quad (3.5)$$

où γ_{1i} est le taux de relaxation et $\gamma_{\varphi i}$ est le taux de déphasage du qubit i . À la section 1.2.1, on a vu que le taux de déphasage d'un qubit supraconducteur de type transmon était beaucoup plus petit que son taux de relaxation. Ainsi, on néglige le déphasage dans les simulations ($\gamma_{\varphi i} = 0$).

On tient compte aussi d'un taux de relaxation du résonateur j à un taux κ_j qu'on modélise par le dissipateur suivant : $\kappa_j D[a_j]$. Ce dissipateur change de forme dans le régime dispersif, on a :

$$\kappa_j D[a_j] \rightarrow \kappa_j D[a_j] + \kappa_j D\left[\sum_i \lambda_{ij} \sigma_-^i\right] \quad (3.6)$$

où $\lambda_{ij} = \frac{g_{ij}}{\omega_{ai} - \omega_{rj}}$ est le rapport du couplage et de la différence de fréquence entre le qubit i et le résonateur j . On observe qu'un second terme de relaxation pour les qubits apparaît. Cette relaxation induite par le résonateur est connue sous le nom d'effet Purcell [35, 39]. Il s'agit d'une forme de relaxation un peu particulière puisque les termes de relaxation associés aux différents qubits couplés à un même résonateur sont sommés dans un même dissipateur, suggérant une relaxation cohérente pour ces qubits. Pour cette raison, certains états sont immunisés contre l'effet Purcell et d'autres y sont plus sensibles [62]. Par exemple, lorsque deux qubits sont couplés à un même résonateur et que, pour ces qubits, $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$, le dissipateur Purcell prend la forme suivante :

$$\kappa D[\lambda \sigma_-^1 - \lambda \sigma_-^2] \quad (3.7)$$

En observant l'effet de ce dissipateur sur différents états à deux qubits, on constate que :

$$D[\lambda\sigma_-^1 - \lambda\sigma_-^2] \left(\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 01| + \langle 10|}{\sqrt{2}} \right) = 0 \quad (3.8)$$

et que :

$$D[\lambda\sigma_-^1 - \lambda\sigma_-^2] \left(\frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 01| - \langle 10|}{\sqrt{2}} \right) = 2\lambda^2 |00\rangle \langle 00| \quad (3.9)$$

Dans le premier cas, l'état est complètement immunisé contre la relaxation Purcell. Dans le second cas, le taux de relaxation Purcell est deux fois plus élevé que le taux moyen $\kappa\lambda^2$. Lorsque les qubits n'ont pas la même fréquence de résonance, il est raisonnable de penser que l'effet de cohérence dans la relaxation Purcell disparaît. On le voit en se plaçant dans le référentiel tournant des qubits : les termes de cohérence oscillent à une fréquence élevée et peuvent être négligés. La relaxation Purcell prend alors la forme suivante :

$$\sum_{ij} \kappa_j \lambda_{ij}^2 D[\sigma_-^i] \quad (3.10)$$

En effectuant un développement similaire au cas du code à trois qubits présenté à l'annexe D, on parvient à trouver une équation maîtresse pour les qubits :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i[H, \rho] - i \sum_j \Pi_{\alpha_j} \left[\sum_{ij} \chi_{ij} \sigma_z^i, \rho \right] \Pi_{\alpha_j}^* + \sum_i \gamma_{1i} D[\sigma_-^i] \\ & \sum_i \frac{\gamma_{\varphi i}}{2} D[\sigma_z^i] \rho + \sum_{ij} \kappa_j \lambda_{ij}^2 D[\sigma_-^i] + \sum_j \sqrt{\kappa_j \eta_j} \xi_j(t) \mathcal{H}[\Pi_{\alpha_j} e^{-i\phi_j}] \rho \end{aligned} \quad (3.11)$$

où :

$$\begin{aligned} H = & \frac{g_{11}g_{21}}{2} \left(\frac{1}{\omega_{a1} - \omega_{r1}} + \frac{1}{\omega_{a2} - \omega_{r1}} \right) (\sigma_+^1 \sigma_-^2 + \sigma_-^1 \sigma_+^2) \\ & + \frac{g_{32}g_{42}}{2} \left(\frac{1}{\omega_{a3} - \omega_{r2}} + \frac{1}{\omega_{a4} - \omega_{r2}} \right) (\sigma_+^3 \sigma_-^4 + \sigma_-^3 \sigma_+^4) \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.2 Résultats

Dans cette section, on évalue la pertinence d'utiliser la mesure de parité sur les qubits supraconducteurs pour corriger les erreurs. Pour ce faire, on utilise le simulateur pour

caractériser l'erreur qui s'est produite dans le système, tel qu'expliqué à la section 2.1. Ce simulateur utilise les équations (3.1) et (3.11) pour simuler l'évolution des systèmes. On corrige l'état obtenu en sortie du simulateur grâce à l'algorithme de programmation semi-définie, tel qu'expliqué à la section 2.3. On calcule finalement la fidélité de cet état à l'état initial et on moyenne cette fidélité sur plusieurs trajectoires.

L'analyse des résultats se fait de la manière suivante. D'abord, on réalise le protocole décrit plus haut en incluant les mesures continues du syndrome, puis, on suit ce même protocole sans inclure les mesures. On calcule ensuite la fidélité à l'état initial dans le cas où aucune correction d'erreur n'est réalisée, soit le cas où on laisse évoluer k qubits non-encodés (où k est le nombre de mots codes dans le code correcteur utilisé). Pour pouvoir affirmer qu'une mesure puisse en principe aider à corriger les erreurs, il faut que la fidélité moyenne obtenue lorsque les mesures du syndrome sont incorporées au protocole soit supérieure à celle obtenue lorsque les mesures ne sont pas incorporées. Il faut aussi que la fidélité obtenue soit supérieure à celle obtenue lorsque le qubit n'est pas encodé, autrement dit, lorsqu'il n'y a pas de protocole de correction. Si la fidélité lorsqu'on incorpore les mesures est inférieure à celle obtenue lorsqu'on ne les incorpore pas, cela signifie que la mesure introduit plus de bruit dans le système qu'elle n'apporte d'information sur l'erreur qui l'a affecté. Si la fidélité est inférieure à celle obtenue lorsque le qubit n'est pas encodé, cela signifie que le code est inefficace pour corriger les erreurs qui se produisent dans le système. Il vaut alors mieux ne pas faire de correction d'erreur.

3.2.1 Paramètres utilisés

Dans la section précédente, les équations maîtresses utilisées pour simuler les codes à trois et à quatre qubits sur des qubits supraconducteurs, soit les équations (3.1) et (3.11), ont été développées. Différents paramètres entrent en jeu dans ces équations, l'impact de plusieurs d'entre eux en correction d'erreur est étudié dans les prochaines sections. Ces paramètres sont présentés au tableau 3.1.

Pour que la mesure soit efficace à corriger les erreurs, il faut avant tout qu'il s'agisse d'une bonne mesure de parité. En effet, si on arrive à distinguer les états d'une même parité en mesurant le syndrome d'erreur, on détruit les superpositions des mots codes. Dans la section 1.2.4, on a mentionné que, pour effectuer une bonne mesure de parité, il faut ajuster certains paramètres. On s'est ainsi inspiré du travail de Lalumière et al. [28] dans le choix des paramètres à tester. On ajuste les couplages dispersifs de sorte

λ_{ij}	Rapport du couplage et de la différence de fréquence entre le qubit i et le résonateur j
χ_{ij}	Déplacement de la fréquence du résonateur j causé par le qubit i (GHz)
ϵ_j	Excitation envoyée au résonateur j (GHz)
η_j	Efficacité de la mesure associée au résonateur j
κ_j	Taux de relaxation du résonateur j (GHz)
γ_{1i}	Taux de relaxation du qubit i (GHz)
γ_{xi}	Taux d'inversion (pour étudier le code à trois qubits) (GHz)

TABLEAU 3.1 – Paramètres importants

que $\chi_1 = -\chi_2 = \chi$, où χ_i est le déplacement en fréquence d'un résonateur dû à son couplage avec le qubit i . Ce choix de paramètre empêche de distinguer les états de parité paire par une mesure. De cette façon, il protège l'espace de parité paire contre le déphasage induit par la mesure. On s'assure ainsi que l'espace code est exempt de cet effet indésirable. Aussi, dans les simulations effectuées, la fréquence de l'excitation ω_d envoyée au résonateur est toujours égale à la fréquence ω_r de ce dernier, et la phase de l'oscillateur local dans la mesure homodyne est $\phi_{LO} = \pi/2$. Ces choix empêchent de distinguer les états de parité impaire. C'est avec de tels paramètres qu'on effectue les mesure de parité [28].

En choisissant les paramètres, il faut également s'assurer qu'on se place dans un régime où les approximations effectuées pour simuler les systèmes sont valides. Ainsi, pour être dans un régime où l'approximation dispersive est valide, on a vu qu'il faut que $\lambda_{ij} \ll 1$ et que $\langle n_j \rangle \ll n_{\text{crit}}$. La seconde condition se traduit comme (voir les équations (1.49) et (1.50)) : $\epsilon^2/(\kappa/2)^2 \ll 1/(2\lambda)^2$. On fixe donc une limite pour ces deux paramètres, soit $\lambda_{ij} < 0.1$ et $\langle n_j \rangle < n_{\text{crit}}/10$. Il faut aussi s'assurer que le taux de relaxation des résonateurs soit beaucoup plus grand que celui des qubits afin que la transformation du polaron soit valide.

3.2.2 Le code à trois qubits

Le premier cas analysé pour tester la mesure est celui du code à trois qubits. Comme ce code ne corrige que les erreurs d'inversion, on a supposé que les erreurs se produisant sur le système étaient de cette nature et on a négligé la relaxation et le déphasage. Ce modèle d'erreurs n'est pas fidèle à la réalité des qubits supraconducteurs, mais il est intéressant à étudier. En effet, le code à trois qubits est un code simple et intuitif.

De plus, des états à trois qubits maximalement intriqués ont déjà été réalisés pour les qubits supraconducteurs [24,25]. On étudiera un modèle réaliste plus loin. On a vu qu'un tel système suit une trajectoire dictée par l'équation (3.1). On a pu observer que sous certaines conditions, une mesure continue pouvait en principe aider à mieux corriger les erreurs .

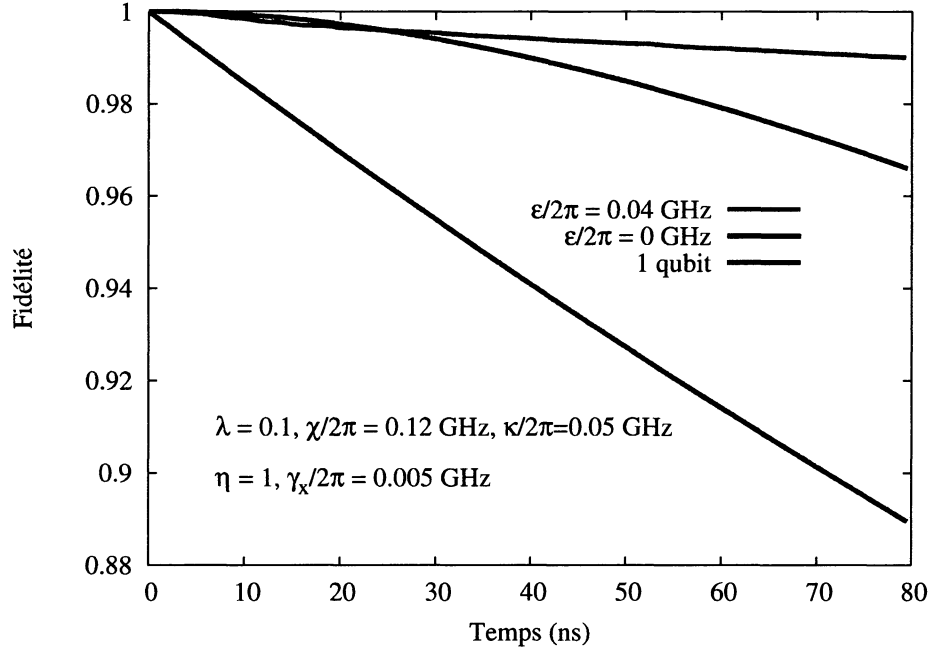


FIGURE 3.2 – Graphique de la fidélité à l'état initial (voir équation (2.9)) en fonction du temps, lorsque le code à trois qubits est réalisé sur des qubits supraconducteurs pour corriger des erreurs d'inversion qui se produisent à un taux $\gamma_x = 0.005$ GHz. La courbe rouge est la fidélité obtenue lorsqu'on incorpore les mesures du syndrome dans le protocole de correction, la courbe verte représente le cas où il n'y a pas de mesures. La courbe bleue correspond au cas où le qubit n'est pas encodé, autrement dit, le cas où aucun protocole n'est appliqué. Les courbes ont été moyennées sur environ 8000 trajectoires.

Le graphique 3.2 trace la fidélité moyenne en fonction du temps, telle que montrée par l'équation (2.9). La courbe rouge de ce graphique correspond au cas où la mesure est incorporée au protocole de correction d'erreur. La courbe verte correspond au cas où aucune mesure n'est effectuée pendant l'évolution bruyante du système. La courbe bleue correspond au cas où on ne simule qu'un seul qubit, autrement dit, le cas où on n'encode pas le qubit et où on n'effectue aucune correction.

On constate d'abord que sur la période de temps simulée, soit 80 nanosecondes, les courbes rouges et vertes affichent une fidélité supérieure à la courbe bleue. Cela signifie

que le code à trois qubits est efficace contre le modèle d'erreurs utilisé. Ce résultat n'est pas surprenant : il était déjà admis que ce code corrigeait les erreurs d'inversions.

Cependant, pour pouvoir conclure que la mesure aide à corriger des erreurs, il faut aussi que la courbe rouge soit supérieure à la verte, autrement dit, il faut que le fait d'inclure les mesures au protocole de correction augmente la fidélité. On voit que, pour un temps inférieur à environ 25 nanosecondes, il est préférable de ne pas effectuer de mesures continues pour corriger des erreurs. Ce résultat est expliqué par le fait que la mesure induit du déphasage. En effet, dans la section 3.2.1, on explique que les paramètres sont ajustés pour que la mesure de parité sur les qubits supraconducteurs n'induisse pas de déphasage dans l'espace code. Cependant, cette mesure induit du déphasage dans tout autre sous-espace. Cela signifie, par exemple, que si un état dans l'espace code $\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$ subit une erreur d'inversion et devient, par exemple $\alpha|100\rangle + \beta|011\rangle$, il subira par la suite du déphasage en raison des mesures continues prises sur le système. Après un temps d'environ 25 nanosecondes, la correction devient plus efficace lorsqu'on a continuellement pris des mesures sur le système. On en conclut que, lorsque le temps entre la préparation et la correction du système est long, les mesures continues aident à corriger les erreurs.

L'efficacité de mesure utilisée dans les simulations est $\eta = 1$. On a vu qu'une telle efficacité de mesure n'est pas réaliste, notamment parce qu'il fallait amplifier le signal avant de le mesurer. Le graphique 3.3 illustre la fidélité pour un temps $t = 48$ ns en fonction de l'efficacité des mesures η . Le choix du temps $t = 48$ ns correspond approximativement au temps qu'il faut pour effectuer une opérations sur deux qubits [26]. Le code de couleur utilisé est le même que pour le graphique 3.2. On constate que la fidélité diminue en fonction de l'efficacité des mesures. En dessous d'une efficacité d'environ 0.85, il devient préférable de ne pas incorporer de mesures continues dans le protocole de correction. En comparant les courbes rouges (avec mesures) et vertes (sans mesures) à une efficacité de mesure nulle ($\eta = 0$), on peut estimer la quantité de bruit supplémentaire qu'ajoute la mesure au système.

L'exemple du code à trois qubits montre que la mesure de parité sur les qubits supraconducteur peut en principe être utilisée pour corriger les erreurs, à condition d'avoir de bons paramètres expérimentaux et que le temps entre la préparation de l'état initial et la correction du système soit suffisamment long. Lorsque ce temps est court ou que l'efficacité de mesure n'est pas suffisamment élevée, il vaut mieux ne pas effectuer de mesures et simplement appliquer une correction optimale à la fin du processus. Ce constat

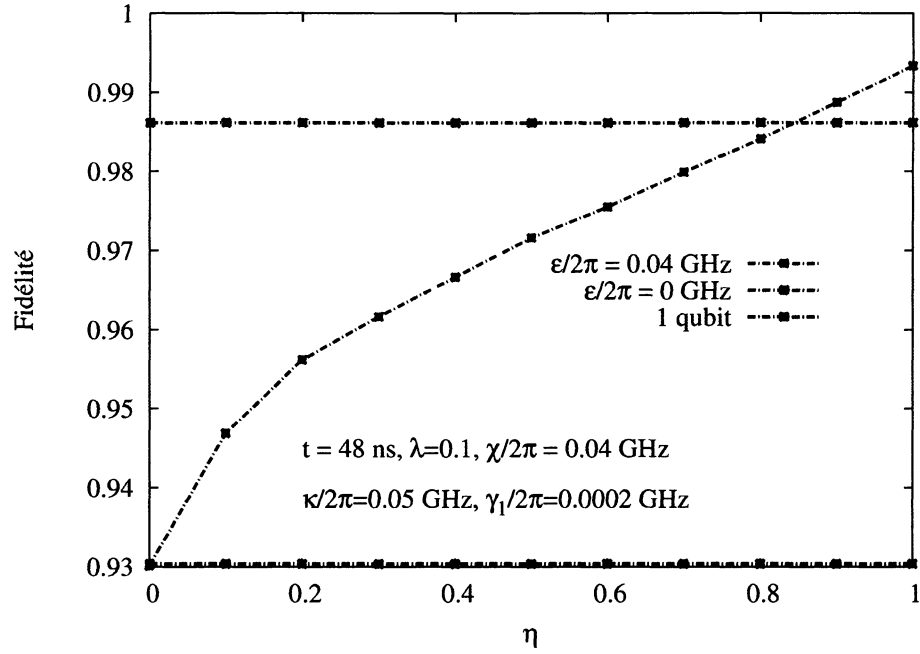


FIGURE 3.3 – Graphique de la fidélité à l'état initial en fonction de l'efficacité des mesures η , à un temps égal à 48 nanosecondes. Le code de couleur utilisé est identique à celui du graphique 3.2. La mesure apporte un gain seulement lorsque l'efficacité est élevée.

s'explique par le fait que la mesure induit du déphasage lorsqu'on quitte l'espace code.

3.2.3 Le code à quatre qubits

L'efficacité de la mesure de parité à corriger des erreurs a également été étudiée dans le contexte du code à quatre qubits. Le code à quatre qubits est spécialement conçu pour corriger la relaxation. Comme les qubits supraconducteurs sont sensibles à la relaxation, ce code est mieux adapté pour ces systèmes. On observe encore une fois que la mesure de parité sur les qubits supraconducteurs peut aider à corriger les erreurs. De plus, celle-ci semble mieux adaptée à corriger la relaxation que corriger les erreurs d'inversion.

Le graphique 3.4 montre un bon exemple de cas où la mesure aide à la correction d'erreurs. Il s'agit d'un graphique de la fidélité en fonction du temps lorsque les mesures sont incorporées au protocole de correction (courbe rouge), lorsque les mesures ne sont pas incorporées (courbe verte) et pour un seul qubit (courbe bleue). Cette fois, contrairement au cas à trois qubits, la courbe rouge se situe toujours au-dessus des deux autres, ce qui signifie que la mesure aide à corriger les erreurs en tout temps.

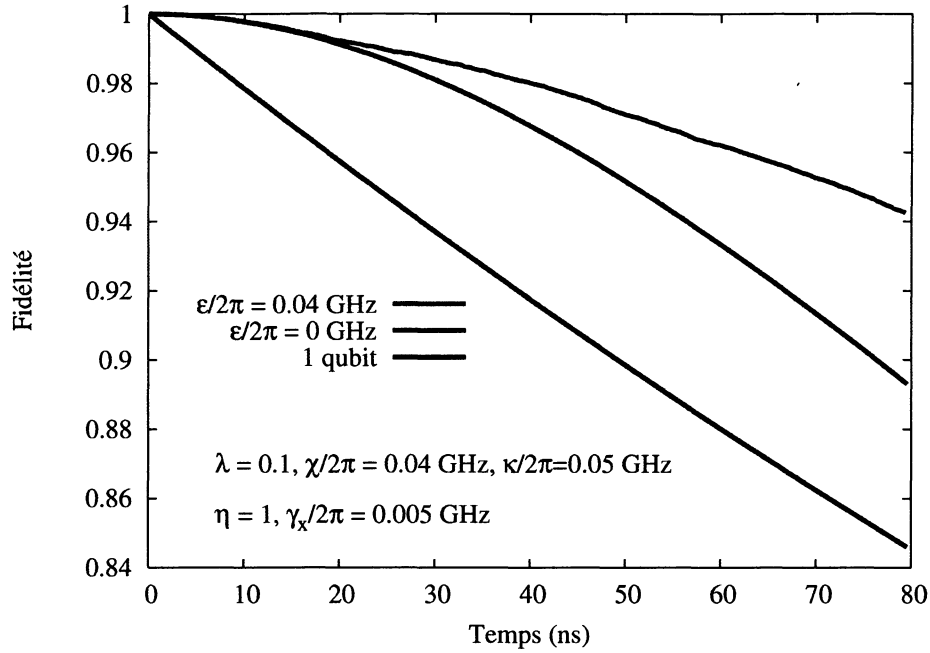


FIGURE 3.4 – Graphique de la fidélité à l'état initial en fonction du temps, pour le code à quatre qubits contre la relaxation. Le taux de relaxation des qubits est $\gamma_1 = 0.0002$ GHz. Le code de couleur est le même que celui du graphique 3.2. Les courbes ont été moyennées sur environ 8000 trajectoires. L'efficacité de la mesure est $\eta = 0.8$. Le taux de relaxation des résonateurs est $\kappa = 0.05$ GHz.

Le graphique 3.5 trace la fidélité à $t = 48$ ns en fonction de l'efficacité de mesure η . On voit que la fidélité augmente avec une augmentation de l'efficacité de mesure, prouvant l'utilité de la mesure pour la correction. De plus, en comparant ce graphique avec le graphique 3.3, on constate que la mesure de parité semble mieux adaptée à corriger la relaxation que les erreurs d'inversions. En effet, contrairement au cas à trois qubits, la courbe rouge (avec mesures du syndrome) ne descend jamais sous la verte (sans mesures). On comprend ce résultat par le fait que le système n'est pas affecté par le déphasage induit par la mesure. Le déphasage induit par la mesure se fait dans l'espace de parité impaire, or le système ne se trouve jamais dans un état de superposition d'état de l'espace de parité impaire lorsqu'il y a uniquement de la relaxation.

Comme le code à quatre qubits est mieux adapté pour combattre les sources de décohérence sur les qubits supraconducteurs, une étude plus exhaustive de l'effet des différents paramètres de mesure a été effectuée. L'effet de l'amplitude de l'excitation est présenté au graphique 3.6. On observe qu'une augmentation de cette amplitude permet toujours de

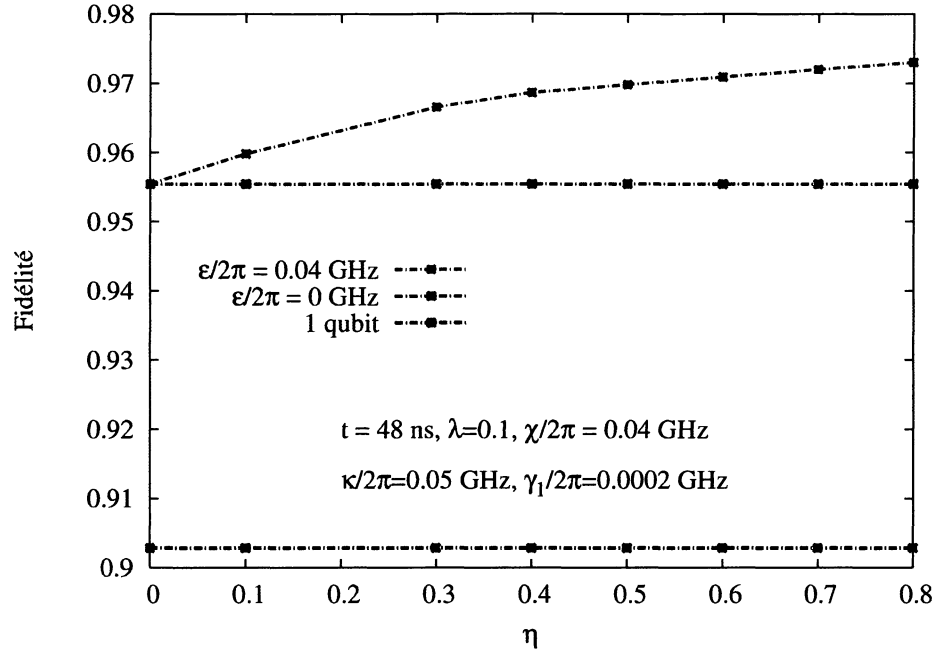


FIGURE 3.5 – Fidélité à $t = 48$ ns en fonction de l'efficacité de la mesure. Pour plus d'explications, voir la description du graphique 3.2

mieux corriger les erreurs. Ainsi, pour les prochains résultats, l'amplitude de l'excitation est toujours égale à la limite qu'on s'est fixée pour respecter l'approximation dispersive, c'est-à-dire que l'excitation induit un nombre moyen de photons dans le résonateur égal à $n_{\text{crit}}/10$.

On a ensuite étudié l'effet de l'amplitude du couplage effectif, illustré par le graphique 3.7. La fidélité augmente avec ce couplage jusqu'à une certaine saturation se produisant vers $\chi = 0.04$. Lorsque le couplage effectif est grand, l'amplitude de l'état cohérent dans le résonateur dépend plus fortement de l'état des qubits couplés à ce résonateur. Il devient alors plus facile de distinguer les états de parités différentes et la mesure est alors plus rapide. Lorsque la démarcation entre chaque état cohérent associé à un état des qubits particulier est suffisamment grande, il ne devient plus nécessaire d'augmenter χ , d'où la saturation observée.

L'effet du taux de relaxation des résonateurs κ est montré par le graphique 3.8. Ce graphique démontre que le gain (la différence entre la fidélité obtenue en prenant des mesures et celle obtenue sans mesures) qu'apporte la mesure en correction d'erreur augmente lorsque κ est élevée. On peut interpréter ce gain par le fait qu'un taux de relaxation élevé du résonateur augmente la rapidité de la mesure. Cependant, la fidélité

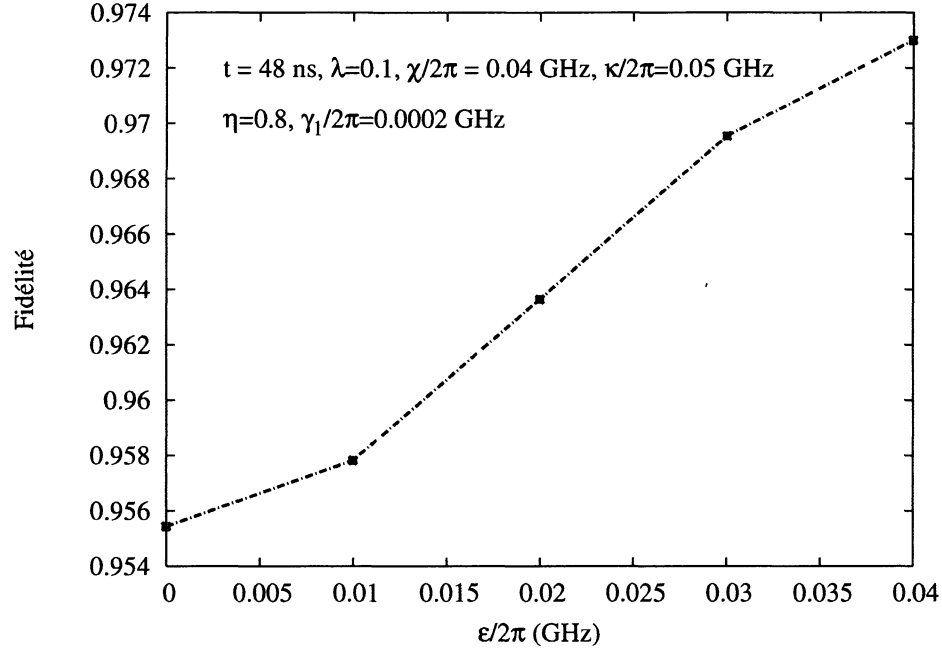


FIGURE 3.6 – Fidélité à $t = 48$ ns en fonction de l'amplitude de l'excitation ϵ . Pour plus d'explications, voir la description du graphique 3.2

moyenne obtenue est supérieure lorsque κ est faible. En effet, le taux de relaxation Purcell (relaxation induite par le résonateur) augmente avec le taux de relaxation du résonateur. Pour préserver l'état des qubits, il est donc préférable d'utiliser un résonateur dont le taux de relaxation est faible. Cependant, lorsque ce taux est élevé, il est préférable de continuellement mesurer le syndrome.

Pour observer une augmentation de la fidélité avec une augmentation du taux de relaxation du résonateur κ , on a diminué le rapport du couplage et de la différence de fréquence entre le qubit et le résonateur λ de sorte à maintenir un taux de relaxation Purcell $\kappa\lambda^2$ constant (voir graphique 3.9). Cette fois, une augmentation de la fidélité avec κ lorsqu'on incorpore les mesures continues du syndrome au protocole de correction est bien observée. Cependant, pour maintenir l'amplitude du couplage effectif constante tout en diminuant λ , il faut augmenter leur couplage avec le résonateur ainsi que la différence de fréquence entre qubits et résonateurs. Les couplages à atteindre deviennent élevés, ce qui pourrait être difficile à atteindre dans une expérience.

En résumé, la mesure de parité sur les qubits supraconducteur est efficace pour contrer la relaxation. Contrairement au cas à trois qubits, cette mesure n'induit pas de déphasage lorsque l'état quitte l'espace code. Ainsi, le fait de mesurer continuellement le système

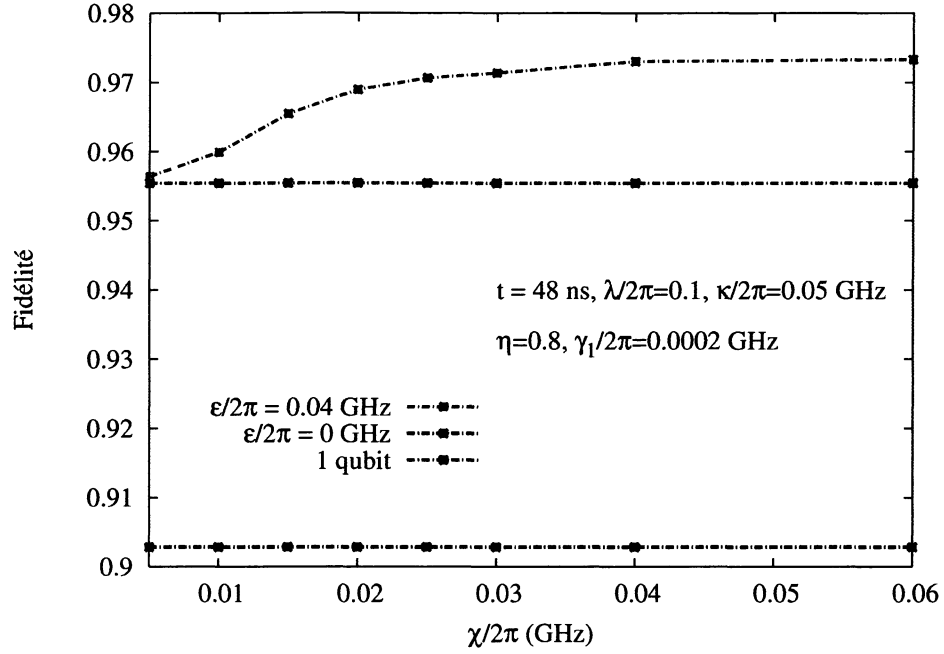


FIGURE 3.7 – Fidélité à $t = 48$ ns en fonction de l’amplitude du couplage effectif χ associé à un qubit. Pour plus d’explications, voir la description du graphique 3.2

ne nuit jamais à la correction d’erreur. Le gain apporté par la mesure augmente avec le couplage effectif et l’amplitude d’excitation envoyée au résonateur. Il augmente également avec le taux de relaxation du résonateur κ , cependant, l’état est mieux protégé contre la relaxation lorsque ce taux est petit. En effet, le couplage avec un résonateur induit de la relaxation sur les qubits (effet Purcell) à un taux qui augmente avec κ . Le taux Purcell dépendant également du couplage effectif entre le qubit et le résonateur, il est possible d’observer une augmentation de la fidélité avec κ en maintenant le taux Purcell constant. Il est également possible de protéger les qubits de cet effet avec un filtre Purcell [63].

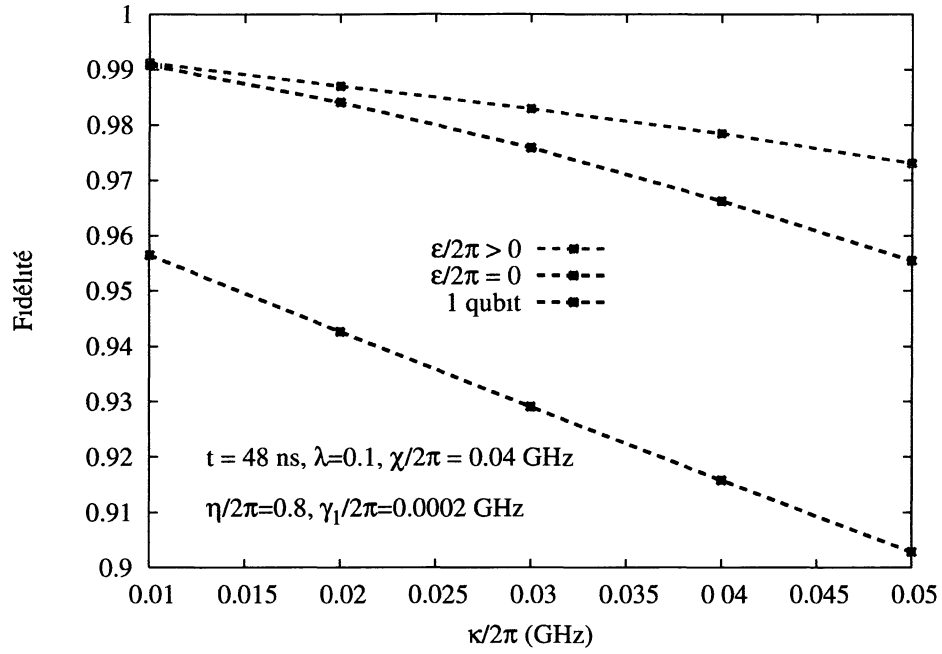


FIGURE 3.8 – Fidélité à $t = 48$ ns en fonction de l'amplitude du taux de relaxation des résonateurs κ . Pour plus d'explications, voir la description du graphique 3.2

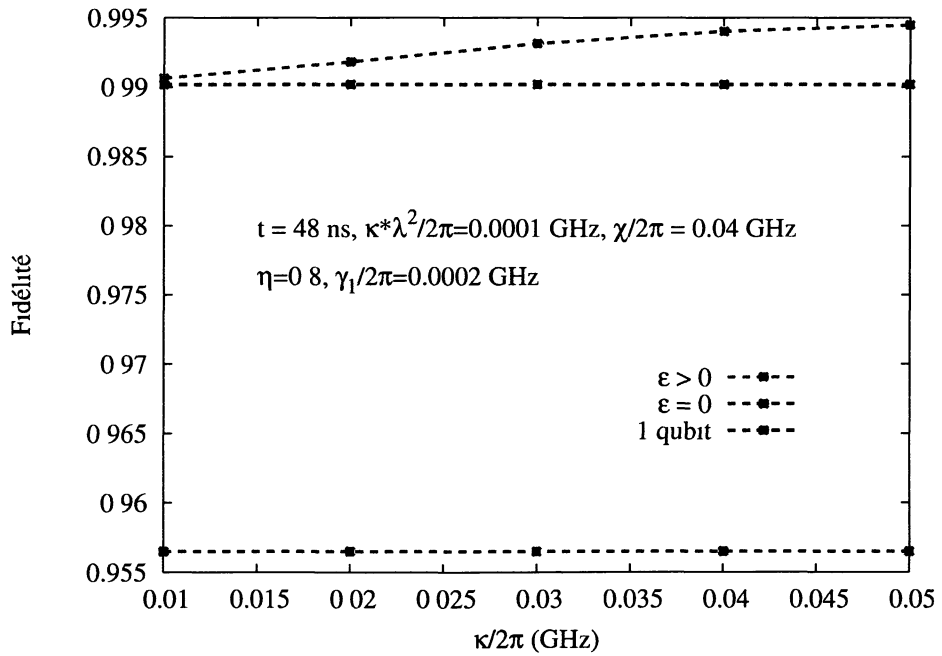


FIGURE 3.9 – Fidélité à $t = 48$ ns en fonction du taux de relaxation des résonateurs κ , à un taux de relaxation Purcell $\kappa \lambda^2$ et un couplage effectif χ constant. Pour plus d'explications, voir la description du graphique 3.2

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié la possibilité d'utiliser une mesure faible, continue et bruyante dans un protocole de correction d'erreurs. Pour ce faire, on a, dans un premier temps, développé un protocole de diagnostique d'erreurs adapté pour les architectures de qubits dont la mesure présente ces caractéristiques. Dans ce protocole, on mesure le système continuellement afin de caractériser l'erreur qui l'a affecté. Une simulation du système conditionnelle aux résultats des mesures prises sur ce dernier est effectuée en parallèle, puis un moyen optimal de corriger le système est trouvé grâce à un algorithme de programmation semi-définie. Ce protocole permet de déterminer si une mesure permet de poser un meilleur diagnostique de l'erreur et ainsi de mieux la renverser. Bien que cette correction optimale ne soit pas réalisable avec les technologies existantes, on montre qu'il est tout de même possible de déterminer de façon expérimentale l'utilité d'une mesure à des fins de correction d'erreurs.

Dans un deuxième temps, on a effectué des simulations numériques dans le but de tester la procédure sur des qubits supraconducteurs. On a alors pu montrer que, sous certaines conditions, la mesure de parité développée par Lalumière et al. [28, 44] peut aider à diagnostiquer les erreurs. En comparant les résultats obtenus pour les codes à trois et à quatre qubits, on remarque qu'il est important de choisir un code correcteur adapté aux particularités physiques des qubits. L'effets des différents paramètres de mesure a également été discuté. Les paramètres de mesure requis pour que le gain apporté par celle-ci soit significatif sont présentement difficiles à atteindre dans une expérience. En observant l'effet du taux de relaxation des résonateurs, on conclut également que les paramètres idéaux pour conserver l'état des qubits ne correspondent pas à ceux pour lesquels la mesure est efficace à corriger les erreurs. Il reste donc encore du travail à faire avant de corriger efficacement les erreurs sur des qubits supraconducteurs.

Les résultats obtenus montrent qu'il est possible d'utiliser des mesures faibles et continues pour corriger les erreurs. La méthode de correction proposée pourrait ouvrir la voie

vers une expérience de correction d'erreurs sur une architecture de qubits dont les mesures présentent ces caractéristiques. Dans des travaux futurs, il serait intéressant d'inclure le contrôle feed-back proposé par Ahn et al. [48] dans le protocole de correction pour étudier l'utilité d'un tel contrôle pour la correction d'erreurs. On pourrait tenter d'ajouter des contraintes sur le canal de correction afin de tenir compte des systèmes dont le contrôle serait restreint, et étudier l'effet d'une mesure dans ce contexte. Il serait également intéressant de tester l'efficacité de codes correcteurs plus complexes tels que le code de Shor généralisé et d'étendre l'étude à d'autres architectures de qubits à mesures faibles et continues.

Annexe A

Les matrices densité

Les matrices densité sont un outil pratique pour représenter un état quantique. La représentation sous forme de matrice densité d'un état quantique $|\psi\rangle$ est :

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (\text{A.1})$$

Comme la matrice (A.1) n'a qu'une seule valeur propre non nulle, on dit qu'elle représente un état pur. L'utilité d'une matrice densité est de pouvoir représenter des états mixtes.

Un état mixte est un mélange statistique d'états purs. Par exemple, on peut s'imaginer la situation où on mesure l'opérateur σ_z sur un qubit dans l'état $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, mais on ne regarde pas le résultat de cette mesure. Le résultat de la mesure est -1 avec probabilité $|\alpha|^2$ ou 1 avec probabilité $|\beta|^2$. Après la mesure, le qubit est soit dans l'état $|0\rangle$, soit dans l'état $|1\rangle$, mais n'est plus dans une superposition de ces deux états. La matrice densité d'un tel état peut être écrite de la manière suivante :

$$\rho = \begin{pmatrix} |\beta|^2 & 0 \\ 0 & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Les éléments diagonaux d'une matrice densité sont associés aux probabilités de mesurer un état. Une matrice densité est donc une matrice positive de trace 1. Les éléments hors-diagonaux d'une matrice densité sont les cohérences entre ces états.

La probabilité d'obtenir le résultat α_i lors d'une mesure d'une observable O sur ρ est :

$$P(\alpha_i) = \text{Tr}(\rho P^{\alpha_i}) \quad (\text{A.3})$$

où les P^{α_i} sont des opérateurs qui répondent aux conditions suivantes :

$$P^{\alpha_i} \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_i P^{\alpha_i} = I \quad (\text{A.5})$$

La condition (A.4) vient du fait que la probabilité de mesurer α_i doit être positive pour toutes matrices ρ . La condition (A.5) vient du fait que la somme des probabilités associées aux différents résultats doit être égale à l'unité.

L'évolution d'une matrice densité n'est pas nécessairement unitaire. Par exemple, en cas de bruit pendant l'évolution du système, celui-ci peut passer d'un état pur à un état mixte. L'évolution d'une matrice densité ρ est généralement exprimée comme suit :

$$\rho' = \sum_{a=1}^n E_a \rho E_a^\dagger \quad (\text{A.6})$$

où ρ' est la matrice densité après évolution du système. Les opérateurs E_a qui caractérisent l'évolution sont souvent nommés opérateur de Kraus. Pour décrire entièrement l'évolution du système, on a en général besoin de n opérateurs de Kraus indépendants, où n est la taille du système. Les opérateurs de Kraus E_a ne sont pas uniques pour décrire un canal. On peut notamment les remplacer par des opérateurs $F_b = \sum_a U_{b,a} E_a$ où U est une matrice unitaire.

Annexe B

Les superopérateurs

Une matrice densité ρ de taille $n \times n$ représentant un état quantique peut être écrite comme un vecteur de taille n^2 . On nomme alors ce vecteur un superket, il est souvent noté comme suit :

$$\rho \rightarrow |\rho\rangle\rangle \quad (\text{B.1})$$

L'évolution d'un superket peut alors être exprimé comme suit :

$$\rho' = \sum_{a=1}^n E_a \rho E_a^\dagger \rightarrow |\rho'\rangle\rangle = S|\rho\rangle\rangle \quad (\text{B.2})$$

où S est une matrice $n^2 \times n^2$ nommée superopérateur. Par exemple, si on écrit :

$$\rho = \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \rightarrow |\rho\rangle\rangle = \sum_{i,j} |i\rangle \otimes |j\rangle \quad (\text{B.3})$$

on a :

$$|\rho'\rangle\rangle = \sum_{a=1}^n E_a \otimes E_a^* |\rho\rangle\rangle \quad (\text{B.4})$$

Annexe C

Isomorphisme de Jamilkovski

L'évolution temporelle d'un état quantique représenté par une matrice ρ peut être écrite comme :

$$\rho' = \sum_{a=1}^n E_a \rho E_a^\dagger \quad (\text{C.1})$$

où ρ' est la matrice densité après évolution du système et les E_a sont les opérateurs de Kraus. Selon l'isomorphisme de Jamilkovski, si la matrice ρ respecte :

$$\text{Tr}_{\text{ref}}(\rho) = I' \quad (\text{C.2})$$

où I' est une matrice identité multipliée par une constante de normalisation, et si les opérateurs E_a sont tous de la forme :

$$E_a = I_{\text{ref}} \otimes E'_a \quad (\text{C.3})$$

alors, le fait de connaître ρ' est équivalent à connaître le canal d'évolution représenté par $\{E_a\}$. En effet, on peut écrire, sans perte de généralité, qu'une matrice ρ satisfaisant l'équation (C.2) a la forme :

$$\rho = \sum_{i,j=0}^{n-1} |i\rangle\langle j|_{\text{ref}} \otimes |i\rangle\langle j| \quad (\text{C.4})$$

Si les opérateurs de Kraus sont tels que montré à l'équation (C.3), alors on peut écrire ρ' comme :

$$\rho' = \sum_{i,j=0}^{n-1} \left(|i\rangle\langle j|_{\text{ref}} \otimes \sum_{a=1}^n E'_a |i\rangle\langle j| E'^{\dagger}_a \right) \quad (\text{C.5})$$

$$= \sum_{i,k=0}^{n-1} \sum_{j,l=0}^{n-1} \left(\sum_{a=1}^n (E'_a)_{k,i} (E'^{\dagger}_a)_{l,j} \right) |ik\rangle\langle jl| \quad (\text{C.6})$$

$$= \sum_{a=1}^n |E_a\rangle\rangle\langle\langle E_a| \quad (\text{C.7})$$

où $|E_a\rangle\rangle$ est un superopérateur tel que montré en annexe B. On en déduit que la matrice ρ' permet de trouver une décomposition d'opérateurs de Kraus qui représentent le canal.

Annexe D

Équation maîtresse pour le code à trois qubits

Pour effectuer des mesures du syndrome dans le code à trois qubits, il faut coupler les deux premiers qubits à un premier résonateur et les deux derniers à un second résonateur. Lorsqu'il n'y a pas de couplage direct entre les résonateurs et qu'on se place dans un régime où l'approximation séculaire s'applique, l'hamiltonien d'un tel système prend la forme suivante :

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{\omega_{ai}}{2} \sigma_z^i + \sum_{j=1}^2 \omega_{rj} a_j^\dagger a_j + \sum_{i,j} g_{ij} (\sigma_-^i a_j^\dagger + \sigma_+^i a_j) \quad (\text{D.1})$$

Le premier terme de l'équation (D.1) représente l'énergie des trois qubits, le second, celle des deux résonateurs et le dernier représente les couplages. Les paramètres g_{ij} sont les forces des couplages entre le transmon i et le résonateur j ; comme le premier et le dernier transmon ne sont couplés qu'à un seul résonateur, on a $g_{12} = g_{31} = 0$.

Pour une mesure de type dispersive, on se place dans le régime où $|\omega_{ai} - \omega_{rj}| \gg g_{ij}$. Dans ce régime, on peut trouver un hamiltonien effectif avec la transformation suivante :

$$H_{\text{effectif}} = U H U^\dagger - i U^\dagger \dot{U} \approx H + [S, H] + \frac{1}{2} [S, [S, H]] \quad (\text{D.2})$$

où $U = e^S$ et on a :

$$S = \sum_{ij} \lambda_{ij} (a_j \sigma_+^i - a_j^\dagger \sigma_-^i) \quad (\text{D.3})$$

où $\lambda_{ij} = \frac{g_{ij}}{\omega_{a_i} - \omega_{r_j}}$. L'hamiltonien du système dans l'approximation dispersive prend donc la forme suivante :

$$\begin{aligned}
H_{\text{effectif}} = & \sum_i \frac{1}{2} \left(\omega_{a_i} + \sum_j \chi_{ij} \right) \sigma_z^i + \sum_j \frac{1}{2} \left(\omega_{r_j} + \sum_i \chi_{ij} \sigma_z^i \right) a_j^\dagger a_j + \\
& \frac{g_{11}g_{21}}{2} \left(\frac{1}{\omega_{a1} - \omega_{r1}} + \frac{1}{\omega_{a2} - \omega_{r1}} \right) (\sigma_+^1 \sigma_-^2 + \sigma_-^1 \sigma_+^2) + \\
& \frac{g_{22}g_{32}}{2} \left(\frac{1}{\omega_{a2} - \omega_{r2}} + \frac{1}{\omega_{a3} - \omega_{r2}} \right) (\sigma_+^2 \sigma_-^3 + \sigma_-^2 \sigma_+^3) + \\
& \frac{g_{21}g_{22}}{2} \left(\frac{1}{\omega_{a2} - \omega_{r1}} + \frac{1}{\omega_{a2} - \omega_{r2}} \right) (a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2) \sigma_z^2 \quad (\text{D.4})
\end{aligned}$$

Les deux premières sommes apparaissant dans cet hamiltonien effectif sont les énergies des qubits et des résonateurs. On déduit que le couplage avec les résonateurs a pour effet de faire déplacer la fréquence des qubits d'un facteur $\chi_{ij} = \frac{g_{ij}^2}{\omega_{a_i} - \omega_{r_j}}$. Ce déplacement est le décalage de Lamb. Le décalage de Stark, qui est un déplacement de la fréquence du résonateur dû aux couplages avec les qubits, apparaît également et est très important pour la mesure. Les deux termes suivants représentent un couplage virtuel entre les qubits couplés à un même résonateur. On appelle ces termes les couplages J . Le dernier est un couplage virtuel entre les deux résonateurs causé par leur couplage avec le second qubit. On a pu négliger ce dernier terme dans les simulations en supposant que les deux résonateurs n'ont pas la même fréquence de résonance.

Lorsqu'on effectue une mesure sur les qubits, on envoie une excitation électromagnétique aux résonateurs. Il faut donc ajouter ces termes d'excitations à l'hamiltonien. Comme l'excitation est envoyée pour mesurer l'état des qubits et non pour effectuer des opérations sur ceux-ci, on choisit une excitation dont la fréquence est près de celle du résonateur. Dans ce cas, les termes d'excitations qui s'ajoutent à l'hamiltonien ont la forme suivante :

$$H_D = \sum_{j=1}^2 (\epsilon_j(t) a_j^\dagger + \text{c.h.}) \quad (\text{D.5})$$

où $\epsilon_j(t)$ est l'amplitude de l'excitation envoyée au résonateur j . Celle-ci est modélisée de la façon suivante :

$$\epsilon_j(t) = \epsilon_{j0} \tanh\left(\frac{t - t_{0j}}{\sigma_j}\right) e^{-i\omega_{dj}t} \quad (\text{D.6})$$

où t_{0j} est le temps où on démarre l'excitation, σ_j représente un temps typique où l'amplitude maximale ϵ_{j0} est atteinte et ω_{dj} est la fréquence de l'excitation. En bonne approximation, les termes d'excitations ne changent pas de forme lors de la transformation dispersive [28].

En principe, le système évolue au cours du temps suivant une évolution unitaire due à l'hamiltonien, tel que le prédit l'équation de Schrodinger. Cependant, en raison de l'environnement bruyant auquel est exposé le système, son état évolue vers un mélange statistique. Pour le code à trois qubits, on suppose que le bruit cause des erreurs d'inversion sur les qubits. Pour modéliser les effets du bruit, on passe dans la représentation des matrices densité. L'évolution d'une matrice densité ρ est dictée par l'équation suivante :

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_{xi}}{2} D[\sigma_x^i] \rho = \mathcal{L}\rho \quad (\text{D.7})$$

L'équation (D.7) est l'équation maîtresse du système. Le premier terme de cette équation représente l'évolution unitaire due par l'hamiltonien. Les autres termes sont des termes de dissipation. Chaque terme de dissipation tient compte des erreurs d'inversion qui peuvent se produire sur le qubit i , et ce, à un taux γ_{xi} . En bonne approximation, ces dissipateurs ne changent pas lors de la transformation dans le régime dispersif [28]. En effet, une transformation au premier ordre en λ_{ij} dans un dissipateur entraîne une transformation au second ordre dans l'équation maîtresse, on néglige donc ces termes.

En vertu du postulat de la mesure en mécanique quantique, l'évolution du système est conditionnelle au résultat des mesures qu'on prend. Le système suit donc une trajectoire particulière, qui est différente à chaque simulation. L'équation maîtresse devient stochastique, on a vu à la section 1.2.3 que celle-ci peut s'écrire comme suit :

$$\dot{\rho}_s = \mathcal{L}\rho_s + \sum_j \sqrt{\kappa_j \eta_j} \xi_j(t) \mathcal{H}[a_j e^{-i\phi_j}] \rho_s \quad (\text{D.8})$$

où κ_j est le taux de relaxation de la cavité j , η_j est l'efficacité de la mesure, $\xi_j(t)$ est un bruit blanc gaussien et ϕ_j est la phase de l'oscillateur local utilisé pour mesurer le signal. L'indice s réfère au fait que l'état est conditionnel aux signaux mesurés, lesquels peuvent s'écrire comme suit :

$$J_j = \sqrt{\kappa_j \eta_j} \langle a_j e^{-i\phi_j} + a_j^\dagger e^{i\phi_j} \rangle \quad (\text{D.9})$$

Finalement, on remarque que l'équation maîtresse (D.8) simule non seulement l'état des qubits mais également celui des résonateurs. Cependant, on sait que les excitations envoyées aux résonateurs créeront des états cohérents. Un moyen d'éliminer les résonateurs est d'appliquer une transformation qui ramène l'état du vide dans le résonateur. Cela revient à appliquer les transformations unitaires suivantes [28] :

$$P_j = \sum_{\sigma_j} D(\alpha_{\sigma_j}^j) \Pi_{\sigma_j} \quad (\text{D.10})$$

où $D(\alpha_j) = \exp[\alpha_j^j a_j^\dagger - \alpha_j^{j*} a_j]$. α_{σ_j} est l'amplitude de l'état cohérent compte tenu de l'état σ_j des qubits couplés au résonateur j . Π_{σ_j} est un projecteur sur l'état des qubits couplés aux résonateurs : on peut écrire que $\Pi_{\sigma_1} = |\sigma\rangle\langle\sigma| \otimes I$ et $\Pi_{\sigma_2} = I \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma|$. Normalement, en raison d'un couplage entre les résonateurs, les P_j ne commutent pas. Cependant, comme on néglige ce couplage, l'ordre dans lequel on fait les transformations P_j n'est pas important. Suivant le développement réalisé en [28], on trouve une équation maîtresse stochastique gouvernant l'évolution des qubits seuls :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{sq} = & -i[H_{\text{effectif}}^Q, \rho_{sq}] - i \sum_j \Pi_{\alpha_j} \left[\sum_{ij} \chi_{ij} \sigma_z^i, \rho_{sq} \right] \Pi_{\alpha_j}^* + \\ & \sum_i \frac{\gamma_{xi}}{2} D[\sigma_x^i] \rho_{sq} + \sum_j \sqrt{\kappa_j \eta_j} \xi_j(t) \mathcal{H}[\Pi_{\alpha_j} e^{-i\phi_j}] \rho_{sq} \quad (\text{D.11}) \end{aligned}$$

Le premier terme de cette équation maîtresse est une évolution due à l'hamiltonien des qubits, où on a :

$$\begin{aligned} H_{\text{effectif}}^Q = & \sum_i \frac{1}{2} \left(\omega_{ai} + \sum_j \chi_{ij} \right) \sigma_z^i + \\ & \frac{g_{11}g_{21}}{2} \left(\frac{1}{\omega_{a1} - \omega_{r1}} + \frac{1}{\omega_{a2} - \omega_{r1}} \right) (\sigma_+^1 \sigma_-^2 + \sigma_-^1 \sigma_+^2) \\ & + \frac{g_{22}g_{32}}{2} \left(\frac{1}{\omega_{a2} - \omega_{r2}} + \frac{1}{\omega_{a3} - \omega_{r2}} \right) (\sigma_+^2 \sigma_-^3 + \sigma_-^2 \sigma_+^3) \quad (\text{D.12}) \end{aligned}$$

et où :

$$\Pi_{\alpha_j} = \sum_j \alpha_j \Pi_{\sigma_j} \quad (\text{D.13})$$

Le second terme de l'équation maîtresse stochastique contient un déphasage induit par la mesure et un déplacement de la fréquence des qubits dû à l'excitation électromagnétique envoyée au résonateur. Le troisième terme est le terme de dissipation qui modélise les erreurs d'inversion dans le système et le quatrième est le terme de mesure. L'équation (D.11) est une approximation valide lorsque les taux de relaxation des qubits sont beaucoup plus petits que les taux de relaxation des résonateurs. L'indice q fait référence au fait que l'état du système est maintenant l'état des qubits seuls. Les signaux mesurés peuvent s'écrire comme suit sous cette transformation :

$$J_j = \sqrt{\kappa_j \eta_j} \langle \Pi_{\alpha_j} e^{-i\phi_j} + \Pi_{\alpha_j}^* e^{i\phi_j} \rangle + \xi_j(t) \quad (\text{D.14})$$

Pour accélérer davantage la simulation, on se place dans le référentiel tournant des qubits. Pour ce faire, on applique sur l'hamiltonien la transformation suivante :

$$H \rightarrow \tilde{H} = U^\dagger H U - iU^\dagger \dot{U} \quad (\text{D.15})$$

où

$$U = \exp \left[-i \sum_i \tilde{\omega}_{ai} \sigma_z^i t \right] \quad (\text{D.16})$$

où $\tilde{\omega}_{ai} = \omega_{ai} + \sum_j \chi_{ij}$ est la fréquence des qubits couplés aux résonateurs. L'hamiltonien du système dans le référentiel tournant est :

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \frac{g_{11}g_{21}}{2} \left(\frac{1}{\omega_{a1} - \omega_{r1}} + \frac{1}{\omega_{a2} - \omega_{r1}} \right) e^{i(\tilde{\omega}_{a1} - \tilde{\omega}_{a2})t} \sigma_+^1 \sigma_-^2 \\ + \frac{g_{22}g_{32}}{2} \left(\frac{1}{\omega_{a2} - \omega_{r2}} + \frac{1}{\omega_{a3} - \omega_{r2}} \right) e^{i(\tilde{\omega}_{a2} - \tilde{\omega}_{a3})t} \sigma_+^2 \sigma_-^3 + \text{c.h.} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Bibliographie

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Laloë. *Mécanique quantique*, volume 1. Hermann, (1997).
- [2] M. A. Nielsen et I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, (2000).
- [3] P. W. Shor. arXiv :quant-ph/0005003v2 (2000).
- [4] P. W. Shor. arXiv :quant-ph/9508027v2 (1995).
- [5] J.-P. Delahaye. *Pour la science* **267**, 104–108 (2000).
- [6] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, et D. J. Wineland. *Phys. Rev. Lett.* **75**(25), 4714–4717 (1995).
- [7] P. Domokos, J. M. Raimond, M. Brune, et S. Haroche. *Phys. Rev. A* **52**(5), 3554–3559 (1995).
- [8] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi, et H. J. Kimble. *Phys. Rev. Lett.* **75**(25), 4710–4713 (1995).
- [9] E. Knill et R. Laflamme. *Phys. Rev. A* **55**(2), 900–911 (1997).
- [10] W. G. Unruh. *Phys. Rev. A* **51**(2), 992–997 (1995).
- [11] P. W. Shor. *Phys. Rev. A* **52**(4), R2493–R2496 (1995).
- [12] A. M. Steane. *Phys. Rev. Lett.* **77**(5), 793–797 (1996).
- [13] D. Poulin. *Phys. Rev. Lett.* **95**(23), 230504 (2005).
- [14] D. Gottesman. *Stabilizer Codes and Quantum Error Correction*. Thèse de Doctorat, California Institute of Technology, (1997).
- [15] P. Aliferis. arXiv :quant-ph/0703230v1 (2007).
- [16] R. Bianchetti, S. Filipp, M. Baur, J. M. Fink, M. Göppl, P. J. Leek, L. Steffen, A. Blais, et A. Wallraff. *Phys. Rev. A* **80**(4), 043840 (2009).
- [17] R. Alicki, D. A. Lidar, et P. Zanardi. *Phys. Rev. A* **73**(5), 052311 (2006).
- [18] A. Wonderen et K. Lendi. *Journal of Statistical Physics* **80**, 273–305 (1995).
- [19] C. C. M. Technical report, University of New Mexico, Albuquerque, USA (2000).
- [20] D. W. Leung, M. A. Nielsen, I. L. Chuang, et Y. Yamamoto. *Phys. Rev. A* **56**(4), 2567–2573 (1997).

- [21] A. Fletcher, P. Shor, et M. Win. *Information Theory, IEEE Transactions on* **54**(12), 5705–5718 (2008).
- [22] L. DiCarlo, J. M. Chow, G. J. M., L. S. Bishop, B. R. Johnson, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, L. Frunzio, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Nature* **460**(7252) (2009).
- [23] M. Ansmann, H. Wang, R. C. Bialzak, M. Hofheinz, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O’Connell, D. Sank, M. Weides, J. Wenner, A. N. Cleland, et J. M. Martinis. *Nature* **461**(7263) (2009).
- [24] M. Neeley, R. C. Bialczak, M. Lenander, E. Lucero, M. Mariani, A. D. O’Connell, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, Y. Yin, T. Yamamoto, A. N. Cleland, et J. M. Martinis. arXiv :1004.4246v2 (2010).
- [25] L. DiCarlo, M. D. Reed, L. Sun, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. Frunzio, S. M. Girvin, M. H. Devoret, et R. J. Schoelkopf. arXiv :1004.4324v1 (2010).
- [26] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Phys. Rev. A* **69**(6), 062320 (2004).
- [27] M. H. Devoret, A. Wallraff, et J. M. Martinis. arXiv :cond-mat/0411174v1 (2004).
- [28] K. Lalumière. Mémoire de Maîtrise, Université de Sherbrooke, (2010).
- [29] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Phys. Rev. A* **76**(4), 042319 (2007).
- [30] A. Houck, J. Koch, M. Devoret, S. Girvin, et R. Schoelkopf. *Quantum Information Processing* **8**, 105–115 (2009).
- [31] J. A. Schreier, A. A. Houck, J. Koch, D. I. Schuster, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Majer, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Phys. Rev. B* **77**(18), 180502 (2008).
- [32] S. M. Girvin, M. H. Devoret, et R. J. Schoelkopf. *Physica Scripta* **T137**, 014012 (13pp) (2009).
- [33] R. J. Schoelkopf et S. M. Girvin. *Nature* **451**(7179), 664–669 (2008).
- [34] M. Boissonneault. Mémoire de Maîtrise, Université de Sherbrooke, (2007).
- [35] M. Boissonneault, J. M. Gambetta, et A. Blais. *Phys. Rev. A* **79**(1), 013819 (2009).
- [36] J. Bourassa, J. M. Gambetta, A. A. Abdumalikov, O. Astafiev, Y. Nakamura, et A. Blais. *Phys. Rev. A* **80**(3), 032109 (2009).
- [37] T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. García-Ripoll, D. Zueco, T. Hummer, E. Solano, A. Marx, et R. Gross. *Nat. Phys.* (2010).
- [38] P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos, J. J. García-Ripoll, E. Solano, C. J. P. M. Harmans, et J. E. Mooij. arXiv :1005.1559v2 (2010).
- [39] E. M. Purcell, H. C. Torrey, et R. V. Pound. *Phys. Rev.* **69**(1-2), 37–38 (1946).

- [40] M. O. Scully et M. S. Zubrany. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, (1997).
- [41] D. M. Pozar. *Microwave Engineering*. Wiley, (2004).
- [42] J. Gambetta, A. Blais, M. Boissonneault, A. A. Houck, D. I. Schuster, et S. M. Girvin. *Phys. Rev. A* **77**(1), 012112 (2008).
- [43] H. M. Wiseman et G. J. Milburn. *Quantum Measurement and Control*. Cambridge University Press, (2010).
- [44] K. Lalumière, J. M. Gambetta, et A. Blais. *Phys. Rev. A* **81**(4), 040301 (2010).
- [45] A. Blais. INTRIQ's workshop on the physical implementation of quantum information, (2009).
- [46] H. Mabuchi et P. Zoller. *Phys. Rev. Lett.* **76**(17), 3108–3111 (1996).
- [47] J. P. Paz et W. H. Zurek. arXiv :quant-ph/9707049v1 (1997).
- [48] C. Ahn, A. C. Doherty, et A. J. Landahl. *Phys. Rev. A* **65**(4), 042301 (2002).
- [49] M. Sarovar et G. J. Milburn. *Phys. Rev. A* **72**(1), 012306 (2005).
- [50] M. Sarovar, C. Ahn, K. Jacobs, et G. J. Milburn. *Phys. Rev. A* **69**(5), 052324 (2004).
- [51] B. A. Chase, A. J. Landahl, et J. Geremia. *Phys. Rev. A* **77**(3), 032304 (2008).
- [52] J. Kerckhoff, H. I. Nurdin, D. S. Pavlichin, et H. Mabuchi. *Phys. Rev. Lett.* **105**(4), 040502 (2010).
- [53] J. E. Levy, A. Ganti, C. A. Phillips, B. R. Hamlet, A. J. Landahl, T. M. Gurrieri, R. D. Carr, et M. S. Carroll. arXiv :0904.0003v1 (2009).
- [54] B. Schumacher. *Phys. Rev. A* **54**(4), 2614–2628 (1996).
- [55] A. S. Fletcher, P. W. Shor, et M. Z. Win. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)* **75**(1), 012338 (2007).
- [56] D. G. Cory, M. D. Price, W. Maas, E. Knill, R. Laflamme, W. H. Zurek, T. F. Havel, et S. S. Somaroo. *Phys. Rev. Lett.* **81**(10), 2152–2155 (1998).
- [57] J. F. Poyatos, J. I. Cirac, et P. Zoller. *Phys. Rev. Lett.* **78**(2), 390–393 (1997).
- [58] I. L. Chuang et M. A. Nielsen. *Journal of Modern Optics* **44**(11), 2245 (1997).
- [59] T. Aoki, G. Takahashi, T. Kajiya, J.-i. Yoshikawa, S. L. Braunstein, P. van Loock, et A. Furusawa. *Nat. Phys.* **5**(8), 541–546 (2009).
- [60] P. E. Kloeden et E. Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*. New York : Springer-Verlag, (1995).
- [61] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Nature* **431**(7005) (2004).
- [62] J. M. Gambetta, A. A. Houck, et A. Blais. arXiv :1009.4470v1 (2010).
- [63] M. D. Reed, B. R. Johnson, A. A. Houck, L. DiCarlo, J. M. Chow, D. I. Schuster, L. Frunzio, et R. J. Schoelkopf. *Applied Physics Letters* **96**(203110) (2010).